Vysokoškolská skripta

FAKULTA INFORMATIKY A STATISTIKY

ZÁKLADNÍ METODY STATISTICKÉHO SROVNÁVÁNÍ

prof. Ing. Jakub Fischer, Ph.D.

Ing. Věra Jeřábková, Ph.D.

Ing. Ludmila Petkovová, Ph.D.

Ing. Veronika Ptáčková

Ing. Petra Švarcová

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

Fakulta informatiky a statistiky

Katedra ekonomické statistiky

Základní metody statistického srovnávání

Jakub Fischer

Věra Jeřábková

Ludmila Petkovová

Veronika Ptáčková

Petra Švarcová

OECONOMICA
Nakladatelství VŠE

2019

Recenzenti:

Prof. Ing. Richard Hindls, CSc., dr.h.c.

Ing. Tereza Košťáková

ISBN 978-80-245-2342-2

Úvodem

V předkládaném textu představujeme základní metody používané při statistickém srovnávání ekonomických a sociálních jevů a procesů. Ekonomická teorie nahlíží na socio-ekonomické jevy a procesy prostřednictvím ekonomických pojmů, zatímco ekonomická a sociální statistika tyto jevy a procesy zachycuje pomocí statistických ukazatelů. Typologii ukazatelů věnujeme první kapitolu. Ukazatele následně srovnáváme v čase, prostoru či mezi sebou pomocí indexů a absolutních rozdílů. Proto právě indexy a rozdíly tvoří jádro těchto skript. Jsou totiž nejen nástrojem statistického srovnávání, ale taktéž cenným analytickým nástrojem. Indexy a rozdíly jsme doplnili o vysvětlení jednotlivých typů průměrů. Najdete zde nejen dobře známé vzorce pro jejich výpočet, ale i vysvětlení, kdy a proč je vhodné určitý typ průměru použít.

Skripta slouží primárně jako učební pomůcka pro studenty 1. ročníku bakalářského studia FIS, pro předmět 4ES402 Metody statistického srovnávání. Tomuto vymezení uživatelů přizpůsobujeme i charakter textu: protože se zmíněný předmět vyučuje ještě před základními kurzy statistiky na VŠE v Praze, snažili jsme se o co nejsrozumitelnější učební pomůcku a výklad některých pasáží jsme za tímto účelem zjednodušili. Teoretické základy indexní analýzy jsou převzaty ze šesté kapitoly učebnice autorského kolektivu profesora Hindlse (Hindls a kol., 2004), řešené i neřešené příklady jsou naše vlastní.

Učební pomůcka, kterou právě držíte v rukou, respektive ji vzhledem k její elektronické podobě spíše sledujete na obrazovce, obsahuje celou řadu vzorců, ilustrativních výpočtů, řešených i neřešených příkladů. Při takovém množství je pravděpodobnost výskytu chyby bohužel poměrně vysoká. Budeme vděčni, pokud takovou chybu objevíte a upozorníte nás na ni, stejně tak přivítáme i vaše další postřehy, komentáře či náměty na úpravu či doplnění textu. Rádi je využijeme při přípravě dalších vydání.

Závěrem srdečně děkujeme oběma recenzentům za jejich nesmírně obětavou práci, mimořádně pečlivé čtení a opravdu cenné podněty a připomínky.

Prosinec 2019

Autoři

1 Statistické srovnávání a typy ukazatelů

Statistika je vědecká disciplína, která se zabývá popisem a analýzou hromadných jevů a procesů. Spojuje v sobě řadu činností, od sběru dat přes jejich zpracování a analýzu až po prezentaci výsledků.

Ekonomická statistika se zabývá číselným zachycením a analýzou ekonomických, sociálních a environmentálních jevů a procesů. Takovými jevy či procesy jsou například zaměstnanost, výkon ekonomiky, vývoj cenové hladiny, produktivita práce, chudoba, zaměstnanost či nezaměstnanost, kriminalita, stav životního prostředí a mnoho dalších. Tyto jevy a procesy jsou číselně zachycovány pomocí **STATISTICKÝCH UKAZATELŮ**.

Statistický ukazatel je statistickou charakteristikou, která popisuje určitou sociálně-ekonomickou skutečnost. Jedná se o proměnnou, resp. veličinu, která popisuje hromadnou skutečnost.

Každý statistický ukazatel má definován svůj věcný obsah a formálně logickou konstrukci, která ho řadí mezi statistické veličiny. Z předmětného (obsahového) hlediska se jedná o pojmy a vztahy, které používá i ekonomická teorie. Ta je však definuje čistě verbálně bez ohledu na to, zda jsou kvantifikovatelné či nikoliv. Ekonomická statistika tak musí upřesnit, která část „ideálního typu“ teoreticky chápaného ekonomického pojmu je předmětem měření. Velikost a intenzitu existujících ekonomických jevů a procesů pak vyjadřuje pomocí číselných charakteristik – statistických ukazatelů, při jejichž vymezení musí zohlednit, co je v praxi dostupné a kvantifikovatelné; v praxi se obvykle jedná o kompromis mezi požadavkem na včasnost, přesnost a podrobnost sledovaného jevu[1]. V praxi se vymezení věcného obsahu ukazatele uskutečňuje formou tzv. metodických popisů ukazatelů.

Věcný obsah ⇐ **Ukazatel** ⇒ *Formálně logická konstrukce*

Statistický ukazatel je tedy **zobecněné číselné zobrazení konkrétního ekonomického (sociálního) jevu**. Soulad (či nesoulad) mezi EKONOMICKÝM POJMEM a STATISTICKÝM UKAZATELEM je chápán jako tzv. ADEKVAČNÍ MEZERA. Ta připomíná, že mezi ekonomickými pojmy a statistickými ukazateli není rovnítko; statistickým ukazatelem se snažíme ekonomickým pojmům pouze přiblížit[2].

[1] Srov. též Eurostat (2018), s. 16 a 17.
[2] Podrobně adekvační mezeru i s konkrétními příklady vysvětluje Košťáková (2019), s. 14.

Příklad:

NEZAMĚSTNANOST

Ekonomická teorie zkoumá nezaměstnanost ve vztahu k mnoha dalším jevům. Chceme-li statisticky zachytit (sociálně-ekonomický pojem) nezaměstnanost, musíme nejprve stanovit statistický ukazatel, pomocí něhož budeme daný jev sledovat. Možností se nabízí mnoho. Řekněme, že tímto ukazatelem by mohl být počet nezaměstnaných. V druhém kroku potřebujeme metodicky vymezit, koho považujeme za nezaměstnaného. Ukažme si to na příkladu rodiny Novákových.

Otec pracuje, matka je v současné době nezaměstnaná a hledá práci prostřednictvím úřadu práce, kde je registrovaná. Syn je čerstvým absolventem VŠ a dosud není zaměstnaný, práci si hledá pomocí inzerátu, ale není registrovaný na úřadu práce (zatím spoléhá sám na sebe). Dcera, která v srpnu dokončila střední školu, chce nastoupit do práce až od ledna, na podzim chce ještě cestovat a zdokonalovat se v jazycích. Babička nedávno o práci přišla, ale vzhledem k tomu, že jí zbývá necelý rok do důchodu, zůstává v domácnosti a novou práci nehledá.

Kdo z rodiny Novákových je nezaměstnaný?

Řešení:

Záleží na způsobu sledování nezaměstnanosti.

V **ekonomické teorii** je nezaměstnanost definována jako stav na trhu práce, kdy osoby, které jsou schopny pracovat, nejsou schopny či ochotny nalézt placené zaměstnání.

V **mezinárodně srovnatelné statistice** je podle metodiky Mezinárodní organizace práce (ILO – International Labour Organisation) za nezaměstnaného považována osoba, která je starší 15 let, obvykle bydlí na sledovaném území a splňuje následující tři podmínky[3]:

- nebyla zaměstnána (tj. nemá placenou práci),
- aktivně hledá práci,
- je připravena k nástupu do práce do 14 dnů.

V rodině Novákových splňují tyto podmínky Mezinárodní organizace práce pouze matka a syn. (Všimněme si, že pro nezaměstnanost v pojetí mezinárodně srovnatelné statistiky není podstatné, zdali jsou dané osoby registrované na úřadu práce, či nikoliv.)

[3] Podrobněji a přesněji viz https://www.czso.cz/csu/czso/zam_vsps.

Nezaměstnanost se měří pomocí statistického ukazatele „míra nezaměstnanosti“, který je dán vztahem:

$$u = \frac{N}{N + Z},$$

kde

N – počet nezaměstnaných osob, které splňují podmínku ILO,

Z – počet zaměstnaných osob.

PRAXE V ČR

Obecná míra nezaměstnanosti, kterou sleduje a publikuje ČSÚ na základě výsledků výběrového šetření pracovních sil, a která respektuje metodiku ILO (výše uvedený vzorec), dosahovala v 1. čtvrtletí 2019 v České republice hodnoty 2,0 %.

Dalším statistickým ukazatelem, pomocí něhož se v ČR sleduje nezaměstnanost, je „**podíl nezaměstnaných osob“**. Tento ukazatel sleduje a zveřejňuje Ministerstvo práce a sociálních věcí. Je dán vztahem počtu dosažitelných registrovaných uchazečů o zaměstnání (tj. registrace na úřadu práce a možnost nastoupit do zaměstnání do 14 dnů) k celkovému počtu obyvatel ve věku 15–64 let. Podíl nezaměstnaných osob na obyvatelstvu byl v ČR k 31. 7. 2019 ve výši 2,7 %.

Z výše uvedeného vyplývá, že k jednomu pojmu (nezaměstnanosti) existují v ČR minimálně dva ukazatele, resp. dva způsoby, jak chápat pro statistické účely nezaměstnaného. A způsobů by mohlo být samozřejmě i více. Je možné se například ptát, proč je v podmínkách ILO „připravenost nastoupit do 14 dnů“? Proč ne více nebo méně? To vše je nutné při tvorbě statistických ukazatelů zvážit s ohledem na adekvační mezeru.

1.1 Typy statistických ukazatelů

Statistické ukazatele lze dělit podle jednoduchého členění na ukazatele:

a) primární a sekundární (část 1.1.1),
b) absolutní a relativní (část 1.1.2),
c) extenzitní a intenzitní (část 1.1.3),
d) okamžikové a intervalové (část 1.1.4).

1.1.1 Primární a sekundární ukazatele

Primární ukazatele jsou prvotní ukazatele, přímo zjištěné, neodvozené. Jako příklad lze uvést odpracovanou dobu, stav zásob, počet pracovníků, počet nezaměstnaných k 31. 12. 2019, mzdy.

Sekundární ukazatele jsou ukazatele odvozené z primárních ukazatelů. Mohou vzniknout trojím způsobem, a to jako:

- funkce různých primárních ukazatelů, zpravidla se jedná o rozdíl nebo podíl. Jako příklad lze uvést např. zisk (výnosy mínus náklady), míru nezaměstnanosti, počet nezaměstnaných na jedno volné pracovní místo, produktivitu práce;
- funkce různých hodnot téhož primárního ukazatele – např. časové průměry, konkrétní příklad: průměrný počet zaměstnanců v 1. čtvrtletí 2019;
- funkce dvou primárních ukazatelů, kde alespoň u jednoho pracujeme s více hodnotami (například zisk na jednoho pracovníka), či funkce více než dvou primárních ukazatelů, v nichž pracujeme s více hodnotami (například *průměrné čtvrtletní* tržby připadající na jednoho pracovníka).

1.1.2 Absolutní a relativní ukazatele

Absolutní ukazatele vyjadřují velikost určitého jevu bez vztahu k jinému jevu. Patří sem všechny primární ukazatele a některé sekundární ukazatele – například počet nezaměstnaných osob, zisk, přidaná hodnota (rozdíl mezi tržbami a součtem nákladů na nákup materiálu, energie a služeb).

Relativní ukazatele oproti absolutním ukazatelům vyjadřují velikost jevu ve vztahu k jinému jevu, resp. na měrovou jednotku jiného jevu. Relativní ukazatele jsou vždy sekundární, neboť vznikají jako podíl absolutních ukazatelů. Jako příklad lze uvést HDP na obyvatele. Relativní ukazatele označujeme buď pojmem podíl (jestliže ukazatel v čitateli je věcnou součástí ukazatele ve jmenovateli), nebo poměr (jestliže ukazatel v čitateli věcnou součástí ukazatele ve jmenovateli není).[4] Podílem může být třeba již zmíněný podíl zaměstnaných osob z celkového počtu 15leté a starší populace, příkladem poměru je počet nezaměstnaných připadajících na jedno volné pracovní místo.

[4] Srov. též Košťáková (2019), s. 28-29.

1.1.3 Extenzitní a intenzitní ukazatele

Rozdělení ukazatelů na extenzitní a intenzitní je důležité zejména v indexní teorii a praxi, neboť při konstrukci indexů a absolutních rozdílů je nutné rozlišovat, zda srovnáváme veličiny extenzitní či intenzitní.

Extenzitní ukazatele se obvykle značí symboly „q“ a „Q“ a vyjadřují rozsah, množství, počet či objem sledovaného jevu. Jedná se o absolutní ukazatele (například počet zaměstnanců, maloobchodní tržby). Jsou charakteristické tím, že se získávají přímým měřením, vážením, sčítáním, popřípadě tak, že určitou extenzitní veličinu vynásobíme intenzitní veličinou (například mzdové náklady jako součin hodinové sazby a počtu odpracovaných hodin).

Pokud lze extenzitní ukazatele sčítat tak, aby součet pro celek dával stejný obsahový smysl jako tentýž ukazatel za jednotlivé části celku, jedná se o **stejnorodé extenzitní veličiny** (např. sledujeme objem vytěženého černého uhlí v pěti dolech – součtem získáme zase objem vytěženého uhlí).

Pokud je nelze shrnovat pomocí součtů (kdybychom například kromě těžby černého uhlí sledovali i těžbu hnědého uhlí, zeminy, uranu), nazýváme tyto **extenzitní veličiny různorodé**.

Intenzitní ukazatele se obvykle značí symbolem „p“ a vyjadřují intenzitu neboli úroveň sledovaného jevu. Jako příklad lze uvést cenu za jednotku či vlastní náklady na jednotku výroby. Jsou charakteristické tím, že je lze vyjádřit jako podíl extenzitních veličin Q a q. Jako příklad lze uvést produktivitu práce, která se vypočítá jako podíl tržby a odpracovaných hodin. Jiným příkladem je (například hodinová) mzdová sazba, ostatně se jedná opět o cenu (práce).

Podílem dvou stejnorodých extenzitních veličin vznikne **stejnorodá intenzitní veličina** (například průměrný hektarový výnos pšenice).

Intenzitní ukazatel je nutno odlišit od indexů. Zatímco intenzitní ukazatel je poměrem dvou různých (různě obsahově definovaných) ukazatelů (například již zmíněný průměrný výnos pšenice připadající na jeden hektar), index je poměrem dvou hodnot stejného ukazatele (například meziroční index celkového výnosu pšenice, meziroční index průměrného hektarového výnosu pšenice nebo index srovnávající celkový či průměrný hektarový výnos na dvou různých územích).

1.1.4 Okamžikové a intervalové ukazatele

Okamžikový ukazatel je stavová veličina. Jeho hodnota se zjišťuje k určitému okamžiku (např. počet nezaměstnaných k 31. 12. 2018, počet obyvatel k 31. 12. 2019).

Intervalový ukazatel je tokovou veličinou, jejíž hodnota se zjišťuje za určité období (například tržby za 1. čtvrtletí 2019).

Členění ukazatelů na okamžikové a intervalové předurčuje způsob jejich shrnování.

U *okamžikového ukazatele*, resp. časové řady okamžikových ukazatelů, hodnot $y_1, y_2, \ldots, y_n$ v n okamžicích $t_1, t_2, \ldots, t_n$ obvykle počítáme tzv. chronologické průměry. Jádro výpočtu spočívá v tom, že nejprve pro jednotlivé naměřené hodnoty vypočteme průměrné hodnoty, které se vztahují ke středům intervalů, a teprve následně tyto hodnoty průměrujeme. Příkladem může být výpočet průměrného měsíčního počtu nezaměstnaných v situaci, kdy známe počty (stavy) nezaměstnaných vždy ke konci kalendářního měsíce. Samotné počty nezaměstnaných ke konci měsíce totiž nemá smysl sčítat.

Průměry za jednotlivé dílčí intervaly časové řady (t_i, t_{i+1}), kde i = 1, 2, …, n–1 (tzv. střední stavy) vypočteme jako prosté aritmetické průměry krajních hodnot:

$$\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \ldots, \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \quad . \tag{1.1.1}$$

Jednotlivé dílčí intervaly (t_i, t_{i+1}) můžeme označit jako d_i, kde i = 1, 2, …, n–1. Jsou-li všechny tyto dílčí intervaly stejně dlouhé, tedy $d_i = d_{i+1}$ pro všechna i = 1, 2, …, n–2, počítáme **prostý chronologický průměr**:

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2}}{n-1} . \tag{1.1.2}$$

V případě, kdy vzdálenost mezi jednotlivými okamžiky (d_i) měření je různá, počítáme **vážený chronologický průměr**:

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1+y_2}{2} d_1 + \frac{y_2+y_3}{2} d_2 + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} d_{n-1}}{d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1}} . \tag{1.1.3}$$

Na *intervalové ukazatele*, resp. časovou řadu intervalových ukazatelů, aplikujeme **aritmetický průměr**, pokud chceme znát průměr za interval (n značí počet intervalů):.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} . \tag{1.1.4}$$

Na rozdíl od hodnot okamžikového ukazatele hodnoty intervalového ukazatele sčítat můžeme. Typickým příkladem intervalového ukazatele jsou měsíční tržby, které můžeme za jednotlivé měsíce sečíst (a získat tak roční úhrn a následně měsíční průměr).

1.2 Statistické srovnání ukazatelů

Předmětem STATISTICKÉHO SROVNÁVÁNÍ je srovnávání statistických ukazatelů, které musí být vymezeny:

a) **časově** (např. počet nezaměstnaných **v roce 2018**)
b) **prostorově** (např. počet nezaměstnaných **na území ČR**)
c) **věcně** (např. počet nezaměstnaných **žen**)

Vývoj statistického ukazatele pak lze srovnávat:

a) **v čase** – stejný ukazatel ve stejném prostoru, různý čas (např. změna míry nezaměstnanosti v Karlovarském kraji v *dubnu 2019* oproti *březnu 2019*)
b) **v prostoru** – stejný ukazatel ve stejném období, různý prostor (např. rozdíl míry nezaměstnanosti v dubnu 2019 v *Karlovarském kraji* oproti *Ústeckému kraji*)
c) **věcně (druhově)** - stejné období pro stejný prostor, různé ukazatele (např. porovnání *výnosů* a *nákladů* společnosti Alfa za rok 2018)

Konkrétní hodnota statistického ukazatele, který je vymezen v prostoru a čase, se nazývá ÚDAJ. Jako příklad lze uvést míru chudoby (tj. podíl osob ohrožených příjmovou chudobou)[5], která dosahovala v *České republice v roce 2018* hodnoty 9,6 %.

Statistický ukazatel vypovídá o *úrovni* určitého socio-ekonomického jevu. Kromě úrovně nás zajímá i *vývoj* daného jevu. V dalším textu se budeme zabývat zejména srovnáním statistického ukazatele v čase a prostoru.

Pokud chceme charakterizovat vývoj statistického ukazatele, musíme využít metod statistického srovnávání. Mezi základní metodu statistického srovnání patří srovnávání statistických ukazatelů pomocí **měr rozdílnosti.**

[5] Míra chudoby se určí jako podíl osob ohrožených příjmovou chudobou (tj. počet osob pod hranicí chudoby - dle definice Eurostatu 60 % mediánu národního disponibilního ekvivalizovaného příjmu) z celkového počtu osob; pojem medián si vysvětlíme později.

Rozeznáváme

- **absolutní míry rozdílnosti** (absolutní rozdíl, resp. absolutní přírůstek) a
- **relativní míry rozdílnosti** (index).

Vysvětlíme si je na příkladu časového srovnávání.

Absolutní rozdíl (absolutní přírůstek[6]) vznikne jako **rozdíl dvou hodnot téhož ukazatele** z různého období. Udává, **o kolik** se hodnota ukazatele v čase změnila, či je rozdílná mezi odlišnými prostory. Vyjadřuje tedy *absolutní změnu* v podobě rozměrového čísla popisujícího, o kolik měrných jednotek se hodnoty statistických ukazatelů vzájemně liší (například o kolik tisíc osob vzrostl počet obyvatel či o kolik tun vzrostl průměrný hektarový výnos pšenice).

Index je naopak *relativní mírou rozdílnosti*. Index vznikne jako **podíl dvou hodnot téhož ukazatele z různého období**. Jedná se o bezrozměrné číslo, které udává, **kolikrát** se hodnota ukazatele v čase změnila, či je odlišná od jiného prostoru. Z indexu lze snadno odvodit relativní změnu vyjádřenou v procentech (odečtením konstanty 1 od indexu a následným vynásobením konstantou 100). Takto například meziroční index v hodnotě 2,5 znamená, že sledovaná hodnota vzrostla oproti předchozímu roku 2,5krát, tj. o 150 %: procentní změnu vypočteme jako [(2,5 – 1) krát 100 %].

Absolutní a relativní míry rozdílnosti jsou rovnocenné, nezastupitelné a vzájemně se doplňují.

Příklad

Společnost Orangina s. r. o., zabývající se výrobou výrobku Mangoba, má dva výrobní závody – v Zásmukách a Kraslicích. V roce 2018 společnost vyrobila v zásmuckém závodě celkem 280 tis. ks výrobků, v závodě v Kraslicích pak 630 tis. ks výrobků. Určete, jak se počet vyrobených výrobků v jednotlivých závodech od sebe lišil.

Řešení

Statistický ukazatel, který budeme srovnávat, je počet vyrobených výrobků. Je vymezen jak věcně – výrobek Mangoba, tak i časově – výroba za rok 2018. Naším úkolem je tedy srovnat, jak se od sebe liší počet vyrobených výrobků v prostoru, tj. v jednotlivých závodech.

[6] Pojem „přírůstek“ zde chápeme ve smyslu změny, může tedy nabývat i záporných hodnot.

Absolutní rozdíl

Absolutní rozdíl = počet vyrobených výrobků v kraslickém závodu – počet vyrobených výrobků v zásmuckém závodu = 630 000 – 280 000 = 350 000 ks výrobků Mangoba.

Pokud se na toto srovnání zaměříme nejprve z absolutního hlediska, absolutní rozdíl v počtu vyrobených výrobků mezi jednotlivými závody společnosti Orangina s. r. o. činí 350 tis. ks výrobků. V kraslickém závodu bylo v roce 2018 vyrobeno o 350 tis. ks výrobků Mangoba více, než v zásmuckém závodu.

Index

$$\text{Index} = \frac{\text{počet vyrobených výrobků v kraslickém závodu}}{\text{počet vyrobených výrobků v zásmuckém závodu}} = \frac{630000}{280000} = 2{,}25.$$

Převod na procenta: (2,25 – 1) · 100, tzn. rozdíl 125 %.

Pokud se na toto srovnání zaměříme z relativního hlediska, poměr počtu vyrobených výrobků mezi jednotlivými závody společnosti Orangina s. r. o. činí 2,25. V kraslickém závodě tak bylo v roce 2013 vyrobeno o 125 % výrobků Mangoba více než v zásmuckém závodě. Výsledek bychom mohli uvést i obráceně, mohli bychom říci, že v zásmuckém závodě bylo vyrobeno o 56,6 % výrobků Mangoba méně než kraslickém závodě: index je roven 280 000 / 630 000 = = 0,444, což po převodu na procenta znamená (0,444 – 1) · 100, tj. minus 56,6 %.

Nyní je vhodné se zastavit i u pojmů procento a procentní bod. **Procentní bod** (p. b.) používáme, když chceme popsat absolutní rozdíl relativního ukazatele. Představme si, že došlo ke zvýšení míry nezaměstnanosti například z 10 % na 15 %. Relativní rozdíl činí 50 %, což je ovšem informace, která je pro uživatele zavádějící (pod 50% nárůstem by si mohl představit nárůst z 10 % na 60 %). Absolutní rozdíl činí pět procentních bodů (15 % minus 10 %)[7], nikoliv pět procent (to by míra nezaměstnanosti vzrostla z 10 % na 10,5 %).

Jiným příkladem použití procentních bodů je absolutní srovnání relativní změny. Představme si, že v roce 2019 se výroba v kraslickém závodě meziročně zvýší o 10 %, zatímco v zásmuckém vzroste o 22 %. Můžeme tedy říct, že výroba v zásmuckém závodě rostla o 12 procentních bodů rychleji než v závodě kraslickém.

[7] Podrobněji též Košťáková (2019), s. 34.

1.3 Cvičení

Řešené příklady

Příklad 1

Určete průměrný počet živě narozených dětí v ČR za léta 2015–2018[8].

Rok	Počet živě narozených
2009	110 764
2010	112 663
2011	114 405
2012	114 036
Σ	451 868

Řešení:

Pro intervalové řady použijeme aritmetický průměr

$$\bar{y} = \frac{451\,868}{4} = 112\,967$$

Příklad 2

Vypočítejte průměrný počet ekonomických subjektů v Jihomoravském kraji v letech 2015 až 2018[9].

Rok	Počet ekonomických subjektů k 31. 12.
2014	300 204
2015	304 729
2016	309 786
2017	314 742
2018	319 647

Řešení:

Počet ekonomických subjektů k 31. 12. tvoří okamžikovou časovou řadu, vypočteme tedy chronologický průměr.

Hodnota „n/a" ve statistických tabulkách znamená, že daný údaj není k dispozici (z anglického „not available"), hodnota „x" pak znamená, že daný údaj věcně nemá smysl počítat (zde nemá smysl sčítat počty subjektů ke konci roku z jednotlivých let).

[8] Zdroj: https://www.czso.cz/csu/czso/obyvatelstvo_hu, tab. 1.
[9] Zdroj: https://www.czso.cz/csu/xb/registr-ekonomickych-subjektu-jihomoravskeho-kraje-k-31-12-2018

Rok	Počet subjektů k 31.12.	dílčí průměr (střední stavy)
2014	300 204	n/a
2015	304 729	302 466,5
2016	309 786	307 257,5
2017	314 742	312 264,0
2018	319 647	317 194,5
Σ	x	1 239 182,5

$$\bar{y} = \frac{1\,239\,182{,}5}{4} = 309\,795{,}625$$

Sloupec dílčích průměrů však není nutné počítat a můžeme rovnou dosadit do vzorce (1.1.2) pro prostý chronologický průměr:

$$\bar{y} = \frac{\frac{300\,204}{2} + 304\,729 + \cdots + 314\,742 + \frac{319\,647}{2}}{5-1} = \frac{1\,239\,182{,}5}{4} = 309\,795{,}625$$

Upozornění: Hodnota 309 795,625 skutečně vyjadřuje průměrný počet subjektů za roky 2015 až 2018, nikoli za roky 2014–2018. Hodnota ke konci roku 2014 slouží pouze jako pomocná hodnota pro výpočet, můžeme si ji též zjednodušeně představit jako počáteční stav k 1. 1. 2015.

Příklad 3

K poslednímu dni v měsíci zjišťujeme počet zaměstnanců a tržby za uplynulý měsíc.

Měsíc	Počet zaměstnanců k 31. (resp. 28.) dni	Tržby za měsíc v tis. Kč
Leden	100	5 000
Únor	120	8 000
Březen	140	10 000

Zdroj: vlastní

Dále víme, že k 1. lednu pracovalo v podniku 90 zaměstnanců a produktivita práce[10] je určena jako

$$\mathrm{PP} = \frac{\text{tržby}}{\text{počet zaměstnanců}}. \tag{1.3.1}$$

[10] Způsobů výpočtu produktivity práce je více, tento je pouze jedním z nich.

Zjistěte:

a) průměrné měsíční tržby,
b) průměrný počet zaměstnanců v jednotlivých měsících a v 1. čtvrtletí,
c) produktivitu práce v jednotlivých měsících,
d) průměrnou měsíční produktivitu práce a
e) produktivitu práce za čtvrtletí.

Řešení:

a)

$\bar{y} = \frac{5\,000+8\,000+10\,000}{3} = 7\,667$ Kč

b)

Nejprve musíme určit střední stavy v jednotlivých měsících:

$SS_{Leden} = \frac{90+100}{2} = 95$ zaměstnanců,

$SS_{Únor} = \frac{100+120}{2} = 110$ zaměstnanců,

$SS_{Březen} = \frac{120+140}{2} = 130$ zaměstnanců.

Průměrný počet zaměstnanců v 1. čtvrtletí pak činí: $\bar{y}_I = \frac{95+110+130}{3} = 112$.

Lze rovněž postupovat pomocí vzorce váženého chronologického průměru (1.1.3), který by zohlednil různý počet dnů v měsíci. Vážený chronologický průměr je vhodný pro průměrování okamžikového ukazatele v případě, že vzdálenost mezi jednotlivými okamžiky měření je různá. Výsledek by vyšel jen mírně odlišný.

c)

Při výpočtu produktivity práce v jednotlivých měsících musíme uvažovat hodnoty středního stavu, tj. průměrného počtu zaměstnanců v jednotlivých měsících (nikoliv počet zaměstnanců na začátku či na konci měsíce):

$$PP_{Leden} = \frac{5\,000}{95} = 52{,}6 \text{ tis. Kč na pracovníka,}$$

$$PP_{Únor} = \frac{8\,000}{110} = 72{,}7 \text{ tis. Kč na pracovníka,}$$

$$PP_{Březen} = \frac{10\,000}{130} = 76{,}9 \text{ tis. Kč na pracovníka.}$$

d)

Průměrná měsíční produktivita práce na zaměstnance se vypočte jako:

$$\overline{PP} = \frac{\frac{5000}{95} \cdot 95 + \frac{8000}{110} \cdot 110 + \frac{10000}{130} \cdot 130}{95+110+130} = \frac{5000+8000+10000}{95+110+130} = 68{,}7 \text{ tis. Kč na pracovníka.}$$

e)

Produktivitu práce za 1. čtvrtletí určíme jako:

$$PP_1 = \frac{\text{celkové tržby za 1. čtvrtletí}}{\text{průměrný počet zaměstnanců v 1.čtvrtletí}} = \frac{23000}{112} = 205 \text{ tis. Kč na pracovníka}$$

Neřešené příklady

Příklad 1

Ve firmě Orangina s.r.o. zjišťují každé čtvrtletí stav zásob na skladě. Tabulka uvádí zjištěné stavy zásob.

Den zjišťování stavu zásob	Stav zásob
1. 1. 2018	180 tun
1. 4. 2018	250 tun
1. 7. 2018	220 tun
1. 10. 2018	280 tun
1. 1. 2019	240 tun

Zdroj: vlastní

Spočítejte, jaký byl v celém roce 2018 průměrný stav zásob. Uvažujte rozdílné počty dnů v měsících.

Příklad 2

Vypočítejte průměrný počet žen pracujících v podniku ABC v období od 1. 1. 2012 do 1. 1. 2019 z údajů z tabulky:

Rok	Počet pracujících žen
2012	2 997
2014	3 141
2015	3 211
2019	3 450

Zdroj: vlastní

Příklad 3

V tabulce je uveden měsíční zisk a stav aktiv ke konci měsíce (v mil. Kč). Dále víme, že na počátku roku byl stav aktiv roven 1 000 mil. Kč.

Měsíc	Zisk	Aktiva
1	4	900
2	5	900
3	6	700
4	7	800
5	10	900
6	11	1 000

Zdroj: vlastní

Zjistěte:

a) průměrný měsíční zisk,
b) průměrný stav aktiv v 1. pololetí,
c) ziskovost aktiv v jednotlivých měsících,
d) průměrnou měsíční ziskovost aktiv.

Výsledky:

Příklad 1:

$\bar{y}$ = 240,15

Příklad 2:

$\bar{y}$ = 3234

Příklad 3:

a) 7,17

b) 867

c) 0,0042; 0,0056; 0,0075; 0,0093; 0,0118; 0,0116

d) 0,83 %

2 Průměry

Při popisu polohy statistického souboru používáme průměry pro vyjádření střední hodnoty. Průměrů lze vypočítat hned několik, vždy je ale počítáme ze všech hodnot zkoumaného znaku. Zároveň je to taková hodnota, kterou když nahradíme všechny hodnoty sledovaného souboru, nezmění se určitá důležitá charakteristika souboru. Co je myšleno důležitou charakteristikou a proč je tato vlastnost průměru podstatná, si ukážeme dále.

2.1 Aritmetický průměr

Řekli jsme, že když nahradíme průměrem všechny hodnoty sledovaného souboru, nezmění se důležitá charakteristika. Toto tvrzení si lze ukázat na následujícím příkladu.

Příklad

U sedmi domácností byl zjišťován počet nezaopatřených dětí. Vypočtěme průměrný počet nezaopatřených dětí v jedné domácnosti. Počet dětí v domácnostech je 3; 1; 1; 1; 2; 1; 0.

K výpočtu použijeme tzv. **prostý aritmetický průměr**:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\ , \tag{2.1.1}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n} = \frac{3+1+1+1+2+1+0}{7} = 1{,}29\ .$$

V jedné domácnosti žije průměrně 1,29 nezaopatřených dětí.

Důležitou vlastností všech průměrů je to, že pokud průměrnou hodnotou $\bar{y}$ (ze vzorce 2.1.1) nahradíme hodnoty všech prvků y_t, nedojde ke změně důležité charakteristiky, kterou je v tomto případě úhrn hodnot znaku (tj. počet všech dětí v 7 domácnostech).

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n \cdot \bar{y} \tag{2.1.2}$$

To také znamená, že pokud známe aritmetický průměr znaku y, tedy $\bar{y}$, pak snadno získáme úhrn hodnot znaku (9) vynásobením aritmetického průměru (1,29) rozsahem souboru (7).

Představme si nyní, že počet domácností, u kterých jsme zjišťovali počet nezaopatřených dětí, činí 55. Výsledky jsme uspořádali do tabulky rozdělení četností. Vypočítejme průměrný počet nezaopatřených dětí v jedné domácnosti.

Počet dětí (y_j)	Počet domácností (n_j)	$y_j \cdot n_j$
0	1	0
1	15	15
2	24	48
3	12	36
4	2	8
5	1	5
$\sum$	55	112

Zdroj: vlastní

Pokud máme k dispozici data takto setříděná v tabulce rozdělení četností, můžeme si výpočet zjednodušit použitím **váženého aritmetického průměru**

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j} = \frac{y_1 n_1 + y_2 n_2 \dots y_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}, \qquad (2.1.3)$$

kde n_j jsou četnosti v k třídách.

V případě, kdy máme k dispozici relativní četnosti $p_i = \frac{n_i}{n}$, můžeme psát

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^{k} y_j p_j \,. \qquad (2.1.4)$$

V našem příkladu tedy budeme postupovat následujícím způsobem:

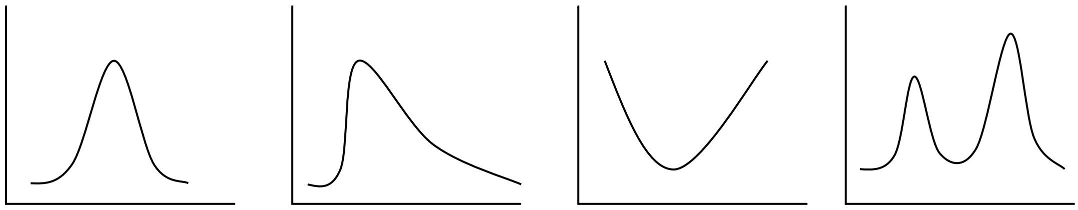
$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 24 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{1 + 15 + 24 + 12 + 2 + 1} = 2{,}04\,.$$

V jedné domácnosti je průměrně 2,04 nezaopatřeného dítěte.

V našem příkladu průměr leží tam, kde jsou četnosti nejvyšší (okolo 2 dětí), a naopak obměny znaku vzdálenější od průměru se vyznačují nízkými četnostmi. Průměr zde tedy podává dobrou informaci o celém souboru (a jeho rozdělení) a někdy o takovém průměru také mluvíme jako o typickém (obrázek 1).

Takové vlastnosti průměru nalezneme především u jednovrcholových symetrických rozdělení a), naopak horší informaci o rozdělení nám bude průměr podávat v případě vícevrcholového rozdělení d) či rozdělení silně sešikmeného b). Především ale průměr nebude podávat dobrou informaci o jednotkách souboru při rozdělení typu c).

Obrázek 1: Typy rozdělení četností



a) b) c) d)

Aritmetický průměr lze vypočítat i v případě, že máme celý soubor rozdělený do *k* různě velkých dílčích podskupin. O úloze pak lze říci, že

- celkový statistický soubor se skládá z *k* skupin (dílčích souborů),
- v první skupině je n_1 členů s hodnotami znaků $y_{11}, y_{12}, \dots y_{1n1}$,
- v *k*-té skupině je n_k členů s hodnotami znaku $y_{k1}, y_{k2}, \dots y_{knk}$,,
- úhrn hodnot znaku v celém souboru je roven

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_i} y_{ij} \, , \tag{2.1.5}$$

- rozsah celého souboru je roven

$$n = \sum_{j=1}^{k} n_j \, , \tag{2.1.6}$$

- aritmetický průměr *j*té skupiny je roven

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_i} y_{ij}}{n_j} \, , \tag{2.1.7}$$

- aritmetický průměr celého souboru je roven

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_i} y_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \bar{y}_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j}. \tag{2.1.8}$$

Aritmetický průměr celého souboru je tedy váženým aritmetickým průměrem dílčích aritmetických průměrů, kde vahami jsou rozsahy dílčích souborů. Výhodou je, že nemusíme znát hodnoty znaku každého jednotlivého prvku.

V našem příkladu si nyní můžeme představit, že soubor domácností byl nyní rozdělen podle příjmu domácnosti do tří dílčích souborů. V každém z těchto dílčích souborů byl vypočítán průměrný počet nezaopatřených dětí. Jaký je celkový průměrný počet nezaopatřených dětí v celém souboru domácností?

Dílčí soubor	Průměrný počet nezaopatřených dětí ($\bar{y}_j$)	Počet domácností (n_j)
I	3,00	13
II	2,48	29
III	1,44	9
$\sum$	x	51

Zdroj: vlastní

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \bar{y}_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j} = \frac{3{,}00 \cdot 13 + 2{,}48 \cdot 29 + 1{,}44 \cdot 9}{51} = 2{,}43$$ dítěte na jednu domácnost.

Průměrný počet nezaopatřených dětí v celém souboru domácností je 2,43 dítěte.

Doposud jsme uvažovali situaci, kdy uvažovaná proměnná byla diskrétního typu (viz níže) a počet obměn znaku byl nízký (tj. počet nezaopatřených dětí v předchozích příkladech je vždy celým číslem a nabývá pouze několika málo hodnot). Jak se však výpočet změní, pokud budeme uvažovat proměnnou spojitou či diskrétní proměnnou s velkým počtem obměn znaku? V tomto případě **využijeme intervalového rozdělení četností**. Vše si ukážeme na proměnné věk.

Nejdříve si ale musíme položit otázku, o jaký typ proměnné se jedná, tedy zda jde o proměnnou spojitou či diskrétní. Překvapujícím zjištěním může být, že obě možnosti jsou správné. Odpověď bude záviset na definici proměnné věk. Vracíme se tedy opět k problematice adekvačního problému. Představme si nyní, že budeme uvažovat věk, který je každý z nás zvyklý udávat, tedy například 25 let, a to bez ohledu na to, jestli jsme měli narozeniny před týdnem či před půl rokem. V demografii bychom tento věk nazvali dokončeným věkem. Počet obměn znaku je v tomto případě konečný a jedná se o proměnnou diskrétní. Mohli bychom však udávat i tzv. přesný věk. V tomto případě bychom na otázku týkající se našeho věku odpověděli například 25,25 a jednalo by se již o proměnnou spojitého typu[11].

I když se v prvním případě jedná o diskrétní proměnnou, bylo by poněkud nepraktické při uvažování všech věkových kategorií vytvářet například tabulku rozdělení četností obsahující řádek pro každý dokončený věk (0, 1, 2 atd.). V obou uvedených případech však můžeme konstruovat intervalové rozdělení četností. Vždy si nicméně musíme uvědomit, že **při využití intervalového rozdělení pro diskrétní proměnnou ztrácíme určité množství informací** oproti tomu, kdybychom agregace do intervalů nepoužili. Představme si například situaci, že máme 4 osoby v kategorii 15 až 19 let. Bez udání jakékoliv bližší informace nejsme schopni určit, jestli všem těmto osobám je 15 let či naopak 19 let. Pokud doplníme úlohu informací, že průměrný věk v tomto intervalu činil 17 let, stále nevíme, jestli bylo všem osobám 17 let či například dvěma osobám bylo 15 let a zbylým dvěma osobám 19 let.

Při tvorbě intervalů musíme určit počet intervalů, jejich délku, hranice mezi jednotlivými intervaly a to, jakým způsobem budou vypadat krajní hodnoty. Samozřejmě se intervaly nesmějí překrývat.

V literatuře lze nalézt mnoho různých pravidel pro určení počtu intervalů. Vždy je ale nutné je brát pouze jako vodítko a výsledný počet intervalů určit na základě komplexního zvážení mnoha hledisek, jakými jsou například povaha dat, účel analýzy, variabilita dat, přítomnost odlehlých pozorování atd.

Z hlediska délky intervalů je nutné nejdříve rozlišit krajní intervaly od intervalů vnitřních. Vnitřní intervaly většinou konstruujeme stejné délky. Různá délka těchto intervalů je vhodná, pokud je nutné poukázat na strukturu dat, která by jinak nemusela být při použití intervalů stejné délky dobře zobrazitelná či zřetelná. Velkou nevýhodou je však jednak složitější využití

[11] Pozn.: Tím výčet možností, jak uchopit pojem „věk“, nekončí. Například životní pojišťovny obvykle počítají věk jako rozdíl aktuálního roku a roku narození – všichni tedy zestárnou o rok najednou k 1. lednu.

takových intervalů pro další výpočty (viz dále), ale i ztížená možnost interpretace, možná nepřehlednost a nesnadná orientace pro uživatele; grafické znázornění může někdy být zavádějící. Jiná situace však nastává, pokud hovoříme o intervalech krajních, tedy prvním a posledním. U nich většinou využíváme buď stejné délky, jakou jsme použili při tvorbě ostatních intervalů, nebo využijeme pouze jedné hranice a z druhé strany necháme interval neohraničený. Například v případě věku konstruovat poslední interval jako „90 a více let".

Při určování hranice mezi intervaly musíme vycházet z toho, že intervaly musí pokrývat všechny sledované hodnoty, ale zároveň se nesmějí překrývat. Častou chybou je zaměňování intervalů pro diskrétní a spojité veličiny. Pokud se opět podíváme na proměnnou věk v tabulce níže, lze intervaly udávat jak způsobem a), který vyjadřuje dokončený věk a jedná se tedy o intervaly pro diskrétní proměnnou, tak i způsobem b), kde je věk definován jako proměnná spojitá.

a) dokončený věk	b) přesný věk
15–19	15,001–20,00
20–24	20,001–25,00
25–29	25,001–30,00

Zdroj: vlastní

Právě délka a hranice intervalů jsou velmi důležité při výpočtu průměru z intervalového rozdělení četností. Průměr se zde počítá obdobně jako v předchozím příkladu, tedy pomocí váženého tvaru, kdy vahami jsou četnosti v jednotlivých intervalech. Samotný celkový průměr je počítán nejlépe z průměrů v jednotlivých intervalech, ale to je informace, kterou většinou neznáme (např. průměrný věk uvnitř věkového intervalu). Pokud tedy nemáme další informace, vycházíme nejčastěji ze středů intervalů. Zde je nutno si však uvědomit dvě možná úskalí:

- pokud krajní intervaly nejsou ohraničené a nemáme žádnou dodatečnou informaci, vycházíme nejčastěji ze znalosti délky nejbližšího intervalu, resp. jeho poloviny,
- středy intervalů jsou závislé i na tom, jestli proměnnou definujeme jako diskrétní nebo spojitou; toho si lze povšimnout i v našem příkladu. Pokud v něm budeme věk definovat jako dokončený věk, bude střed prvního intervalu 17, pokud bychom uvažovali věk přesný, byl by střed 17,5.

Při výpočtu aritmetického průměru z intervalového rozdělení četností se v případě, kdy použijeme středy intervalů (či jakékoliv jiné zvolené hodnoty) neshodující se s průměry v jednotlivých intervalech, dopouštíme určité chyby, protože vypočtený průměr je průměrem středů intervalů a nikoliv jejich průměrů; o takovéto chybě je dobré vědět, nicméně nemusí nutně bránit využití vypočtených výsledků. Takto spočítaný průměr lze zapsat jako

$$\bar{x}_{st.} = \frac{\sum x_{i\,st.} \cdot n_i}{\sum n_i},$$

(2.1.9)

kde $\bar{x}_{\mathrm{st.}}$ je aritmetický průměr vypočítaný na základě středů intervalů a $x_{i\,\mathrm{st.}}$ je střed i-tého intervalu. Při výpočtu se dopouštíme maximální chyby $\frac{1}{2}h_i$, kde h_i je délka i-tého intervalu.

Výše uvedený vzorec (2.1.9) lze dále rozepsat:

$$\bar{x}_{\mathrm{st.}} = \frac{\sum x_{i\,\mathrm{st.}} \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{\sum \left(x_i \pm \frac{1}{2} h_i\right) n_i}{\sum n_i} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} \pm \frac{\sum \frac{1}{2} h_i n_i}{\sum n_i} = \bar{x}_{\mathrm{pr.}} \pm \frac{1}{2} \frac{\sum h_i n_i}{\sum n_i} = \bar{x}_{\mathrm{pr.}} \pm \frac{1}{2} \bar{h}_i ,$$

(2.1.10)

kde $\bar{x}_{\mathrm{pr.}}$ je přesný průměr hodnot, který bychom získali pří výpočtu z průměrů jednotlivých intervalů. Při uvažování středů intervalů bude chyba, které bychom se mohli dopustit maximální v případě, kdy budou všechny hodnoty proměnné vždy shodné s jednou z hranic intervalu. Vše si nyní ukážeme na příkladu.

Příklad:

V podniku Kovostroj byl zjišťován dokončený věk vysokoškolsky vzdělaných zaměstnanců. Výsledky jsou v tabulce. Jaký je průměrný věk vysokoškolsky vzdělaného zaměstnance?

Dokončený věk	Počet zaměstnanců
do 29	123
30–39	561
40–49	611
50–59	616
60 a více	484
∑	2 395

Zdroj: vlastní

Řešení

K určení průměrného věku vysokoškolsky vzdělaného zaměstnance musíme nejdříve určit středy intervalů. V našem případě se jedná o diskrétní proměnnou se stejně dlouhými intervaly o délce 9 (o diskrétní proměnnou se jedná z toho důvodu, že pracujeme s tzv. dokončeným věkem; diskrétní proměnná je naznačená i formou zaznamenání krajních hodnot jednotlivých intervalů). Střed tedy nalezneme, pokud vždy k dolní hranici intervalu přičteme 9/2 = 4,5. Krajní intervaly nejsou ohraničené, použijeme pro ně délku nejbližšího intervalu a jejich středy tak budou 24,5 a 64,5.

Dopočítáme zbylou část tabulky:

Věk	Počet zaměstnanců $(\boldsymbol{n_i})$	Střed intervalu $(\boldsymbol{x_i})$	$x_i\ n_i$
< 30	123	24,5	3 013,50
30 – 39	561	34,5	19 354,50
40 – 49	611	44,5	27 189,50
50 – 59	616	54,5	33 572,00
59 <	484	64,5	31 218,00
∑	2 395	x	114 347,50

$$\bar{x} = \frac{114\ 347{,}5}{2\ 395} = 47{,}7.$$

Jak již bylo řečeno výše, vypočtený průměr je průměrem pro středové hodnoty. Maximální chyba, které jsme se mohli dopustit (neuvažujeme-li to, že krajní intervaly byly původně bez ohraničení) činí 2,25 a platí, že $47{,}7 = \bar{x}_{pr.} \mp 2{,}25$.

Na závěr ještě uvedeme základní vlastnosti aritmetického průměru:

- průměr konstanty je roven této konstantě,
- přičteme-li (odečteme-li) ke všem hodnotám znaku konstantu, průměr se zvýší (sníží) o tuto konstantu,
- násobíme-li všechny hodnoty konstantou, vynásobí se touto konstantou i průměr,
- průměr je funkcí všech *n* hodnot znaku *x* (závisí na velikosti všech hodnot znaku),
- průměr součtu hodnot dvou znaků je roven součtu jejich průměrů,
- celkový průměr je váženým průměrem skupinových průměrů,
- součet odchylek proměnné od průměru je nulový.

2.2 Geometrický průměr

Nyní si představme, že disponujete částkou 100 000 a za tuto částku nakoupíte akcie. Tyto akcie držíte po dobu 3 let. Za 1. rok jsou akcie zhodnoceny 10 %, za 2. rok dojde k zhodnocení 5 %

a za třetí rok je zhodnocení 0 %. Nyní chcete vědět, jaké je průměrné roční zhodnocení vámi nakoupených akcií. Vypočteme tedy hodnotu akcií na konci jednotlivých let:

po 1. roce: 100 000 · 1,10 = 110 000,

po 2. roce: 110 000 · 1,05 = 115 500,

po 3. roce: 115 500 · 1,00 = 115 500.

Hodnoty zhodnocení nemůžeme zprůměrovat aritmetickým průměrem (5 %), protože pokud bychom nahradili všechny hodnoty aritmetickým průměrem, pak zhodnocování akcií bude vypadat následovně:

po 1. roce: 100 000 · 1,05 = 105 000,

po 2. roce: 110 000 · 1,05 = 110 250,

po 3. roce: 115 500 · 1,05 = 115 762.

Vidíme, že hodnota po třetím roce by tak byla odlišná (od 115 500). V našem případě proto hledáme průměrné roční zhodnocení $\bar{I}$, tak, aby platilo:

$$100\,000 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}00 = 100\,000 \cdot \bar{I} \cdot \bar{I} \cdot \bar{I}.$$

Z toho dále vyplývá, že:

$$1{,}10 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}00 = \bar{I} \cdot \bar{I} \cdot \bar{I},$$

$$1{,}10 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}00 = \bar{I}^3,$$

$$\sqrt[3]{1{,}10 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}00} = \bar{I},$$

$$1{,}0492 = \bar{I}.$$

Průměrné zhodnocení je tedy 4,92 %.

Z uvedeného vyplývá, že geometrický průměr používáme, když nemá smysl hodnoty sčítat, ale násobit.

Obdobně jako průměr aritmetický lze i geometrický průměr vyjádřit ve formě

prostého geometrického průměru

$$\bar{y}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i} = \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdots y_n} \qquad (2.2.1)$$

či **váženého geometrického průměru** s vahami n_j

$$\bar{y}_G = \sqrt[\sum n_j]{\prod_{j=1}^{k} {y_j}^{n_j}} = \sqrt[\sum n_j]{{y_1}^{n_1} \cdot {y_2}^{n_2} \cdots {y_k}^{n_k}}. \qquad (2.2.2)$$

2.3 Harmonický průměr

Nyní si představme, že student jde ráno do školy rychlostí 4 km/h. Odpoledne při cestě domů jde toutéž cestou, ale rychlostí 6 km/h. Jaká je průměrná rychlost studenta?

Pro jednoduchost předpokládejme, že cesta do školy (a tedy i ze školy) měří 1 km, i když se průměrná rychlost dá spočítat i bez této dodatečné informace.

Z fyziky víme, že platí:

$$s = v \cdot t, \tag{2.3.1}$$

kde s je délka cesty, t je čas a v je průměrná rychlost. Nyní můžeme odvodit, že doba strávená na cestách do a ze školy činila 25 minut, protože:

- doba strávená cestou do školy činila $t = \frac{1}{4}$ = 0,25 hod. = 15 min a
- doba strávená cestou ze školy činila $t = \frac{1}{6}$ = 0,17 hod. = 10 min.

Pokud bychom nahradili všechny hodnoty aritmetickým průměrem $\frac{6+4}{2} = 5$ km/h a dosadili opět do výše uvedeného vztahu, pak by

- doba strávená cestou do školy činila $t = \frac{1}{5}$ = 0,20 hod. = 12 min a
- doba strávená cestou ze školy činila $t = \frac{1}{5}$ = 0,20 hod. = 12 min.

Zjistíme tak, že doba strávená na cestách by činila pouze 24 minut. Docházíme tedy k tomu, že došlo ke změně důležité charakteristiky, kterou je celkový čas. Pokud by tedy měl být tento čas strávený na cestách stejný při použití průměrných rychlostí pro cestu do školy a pro cestu ze školy s vypočteným časem po dosazení průměrné rychlosti za obě dvě cesty, musí platit

$$\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{\bar{v}} \tag{2.3.2}$$

a tedy

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} \tag{2.3.3}$$

Odkud plyne, že pro průměrnou rychlost můžeme psát

$$\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}. \tag{2.3.4}$$

V našem příkladu je tedy průměrná rychlost

$$\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} + \frac{2}{\frac{5}{12}} = 4{,}8\,\text{km/h}.$$

Průměr, který jsme pro výpočet použili, se nazývá **harmonický průměr** a používáme ho při průměrování relativních ukazatelů (forma podílu, zlomku) v situaci, kdy váhy vztahujeme k ukazateli v čitateli. Pokud bychom váhy vztahovali ke jmenovateli, použijeme průměr aritmetický.

Obdobně jako předchozí průměry, lze i harmonický průměr psát ve formě **prostého harmonického průměru**

$$\bar{y}_H = \frac{n}{\sum \frac{1}{y_i}} \tag{2.3.5}$$

či **váženého harmonického průměru**

$$\bar{y}_H = \frac{\sum n_i}{\sum \frac{n_i}{y_i}}. \tag{2.3.6}$$

<u>Příklad:</u>

Tři brigádníci polepují štítky zboží v krabicích právě přijatých na prodejnu. První brigádník by zboží v 1 krabici polepil za $a = 2$ hodiny, druhý za $b = 3$ hodiny a třetí za $c = 6$ hodin. Za jak dlouho polepí zboží v jedné krabici „průměrný brigádník“?

Řešení

První brigádník polepí za hodinu 1/2 krabice zboží, druhý 1/3 krabice a třetí 1/6 krabice. Celkem tedy za jednu hodinu polepí všichni tři brigádníci 1/2 + 1/3 + 1/6 krabic zboží. Jelikož jsou brigádníci tři, budou polepovat zboží ve třech krabicích a bude jim to trvat průměrnou dobu $\bar{y}_H = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3$ hodiny.

2.4 Kvadratický průměr

Výčet typů průměru bychom měli ještě doplnit o průměr kvadratický. Obdobně jako předešlé průměry, lze i harmonický průměr psát ve formě:

prostého kvadratického průměru

$$\bar{y}_Q = \sqrt{\frac{\sum y_i{}^2}{n}} \qquad (2.4.1)$$

či **váženého kvadratického průměru**

$$\bar{y}_Q = \sqrt{\frac{\sum y_i{}^2 n_i}{\sum n_i}} \qquad (2.4.2)$$

Nejznámějším příkladem prostého kvadratického průměru je **směrodatná odchylka**, která je kvadratickým průměrem odchylek hodnot znaku od jejich aritmetického průměru

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}\,. \qquad (2.4.3)$$

Směrodatná odchylka je jednou ze základních charakteristik variability a seznámíme se s ní v dalších kurzech statistiky.

Ještě doplňme, že pro kladná x pro jednotlivé průměry počítané ze stejného souboru hodnot platí tento vztah:

harmonický průměr ≤ geometrický průměr ≤ aritmetický průměr ≤ kvadratický průměr.

2.5 Cvičení

Řešené příklady

Příklad 1

V tabulce jsou uvedena tempa růstu (v procentech) prodeje automobilů dvou značek v letech 2013–2018. Určete, zda byl v uvedeném období vyšší průměr koeficientů růstu u značky Alfa nebo u značky Omega.

%	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Alfa	n/a	13,1	21,2	14,9	81,4	92,9
Omega	n/a	41,6	56,3	4,2	8,20	14,1

Zdroj: vlastní

Řešení

koeficient růstu:

$$k_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} = \frac{\text{hodnota ukazatele v čase } t}{\text{hodnota ukazatele v čase } t\text{-1}} = \text{změna hodnoty v čase } t \text{ oproti } t\text{-1}$$

Průměrný koeficient růstu $\bar{k}$ je vždy geometrickým průměrem.

$$\bar{y}_G = \sqrt[5]{1{,}131 \cdot 1{,}212 \cdot 1{,}149 \cdot 0{,}814 \cdot 0{,}929} = 1{,}036 \text{ automobily Alfa} \qquad (3{,}6\ \%)$$

$$\bar{y}_G = \sqrt[5]{1{,}416 \cdot 1{,}563 \cdot 1{,}042 \cdot 0{,}820 \cdot 1{,}141} = 1{,}166 \text{ automobily Omega} \qquad (16{,}6\ \%)$$

Průměrný roční nárůst prodeje automobilů mezi lety 2013 a 2018 byl vyšší u automobilů Omega. Průměrné roční tempo růstu bylo vyšší o 13 procentních bodů (16,6 % – 3,6 %).

<u>Příklad 2</u>

Vypočtěte průměrnou rychlost *p* automobilu na celé jeho dráze, jestliže

a) první hodinu jel rychlostí *a* = 80 km/h a druhou hodinu jel rychlostí *b* = 120 km/h.

b) jel z místa *A* do místa *B* stálou rychlostí *a* = 80 km/h a zpět z místa *B* do místa *A* rychlostí *b* = 120 km/h.

Řešení

a)

Průměrná rychlost se počítá jako podíl ujeté dráhy a celé doby jízdy. V případě zadání a) tedy platí

$$p = \frac{a+b}{2} = \frac{80+120}{2} = 100 \text{ km/h.}$$

V této úloze známe čas (jmenovatel zlomku), ale neznáme dráhu automobilu.

b)

V této úloze je *s* vzdálenost mezi místy *A* a *B*, dále *t* doba jízdy z *A* do *B* a *u* doba jízdy z *B* do *A*, je průměrná rychlost rovna:

$$p = \frac{2s}{t+u} = \frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{80}+\frac{1}{120}} = 96 \text{ km/h}$$

Příklad 3

Do restaurace přišlo 20 hostů. Každý v restauraci v průměru utratil 6,50 EUR.

a) Kolik utratili hosté v restauraci dohromady?
b) Každému hostovi byl navíc účtován poplatek za živou hudbu ve výši € 0,75. Jak se to projevilo na průměrné útratě?
c) Jaká bude průměrná útrata, pokud ji restaurace bude účtovat v Kč? (1 EUR = 25 Kč)
d) Mezi hosty byli muži i ženy. Průměrná útrata na 1 osobu činila € 6,50. Ženy (15 osob) se podílely na celkové útratě v restauraci z 60 %. Jaká byla průměrná útrata mužů a jaká žen?
e) Průměrné množství kJ na jednu konzumující osobu bylo 3 400. Jak se změní průměrné množství kJ, pokud si jeden z hostů dá místo guláše (6 000 kJ) zeleninový talíř (1 000 kJ)?

Řešení:

a) $\sum y_i = n \cdot \bar{y} = 20 \cdot 6{,}5 = 130$ EUR

b)

$\sum y_i = n \cdot (\bar{y} + \Delta) = 20 \cdot (6{,}5 + 0{,}75) = 145$ EUR

$\bar{y} = \frac{145}{20} = 7{,}25$ tj. vyšší o 0,75 EUR

c) 6,5 EUR · 25 = 162,5 Kč, tj. zvýšení (v číselném vyjádření) 25krát

d)

muži:

celková útrata je $\sum y_i = 0{,}4 \cdot 130 = 52$ EUR a

průměrná útrata je $\bar{y} = \frac{52}{5} = 10{,}4$ EUR

ženy:

celková útrata je $\sum y_i = 0{,}6 \cdot 130 = 78$ EUR a

průměrná útrata je $\bar{y} = \frac{78}{15} = 5{,}2$ EUR

e)

$\bar{y} = 3400$ kJ

$\sum y_i = n \cdot \bar{y} = 20 \cdot 3400 = 68000$ kJ

nový úhrn: $\sum y_i - 6000 + 1000 = 63000$ kJ

nový průměr: $\bar{y} = \frac{63000}{20} = 3150$ kJ

Neřešené příklady

Příklad 1

Mějme 4 stroje, kterým práce trvá 2,5; 2,0; 1,5 a 6 minut. Jaká je průměrná doba výroby součástky?

Příklad 2

Mějme bazén 3 m hluboký, 9 m široký a 18 m dlouhý. O jaké délce hran je nutné postavit bazén krychlový, má-li být zachován objem bazénu?

Příklad 3

Jaké bylo průměrné meziroční tempo růstu prodeje podniku Design v letech 2016–2018?

Meziroční přírůstky činily:

2015–2016: 17,0 %,

2016–2017: 16,7 %,

2017–2018: 15,8 %.

Příklad 4

Cena jedné akcie Komerční banky na hlavním burzovním trhu SPAD v Praze vzrostla od 18. dubna do 20. dubna téhož roku z 952,50 Kč na 982 Kč. Jaký byl průměrný relativní denní přírůstek ceny této akcie?

Příklad 5

Přírůstek maximálního denního kurzu akcií firmy Epsilon z 16. na 17. ledna 2018 byl 1,108 %, ze 17. na 18. ledna 2018 byl -0,799 % a z 18. na 19. ledna 2018 byl 1,086 %.

Jaký byl průměrný denní přírůstek maximální ceny 1 akcie firmy Epsilon za tato tři období?

Příklad 6

Tatáž součástka se vyrábí na dvou automatech. Starší z nich vyrobí 1 kus každých 6 minut, nový každé 3 minuty. Jak dlouho trvá v průměru výroba jedné součástky?

Výsledky:

Příklad 1

Průměrná doba výroby součástky je 2,308 minuty.

Příklad 2

Pro výpočet objemu hodnoty násobíme, tudíž použijeme geometrický průměr.

$$a = 7{,}862 \text{ m}$$

Příklad 3

16,5 %

Příklad 4

1,537 %

Příklad 5

0,46 %

Příklad 6

4 minuty

3 Indexy

3.1 Indexy a absolutní rozdíly

Veličinu, která kvantitativně popisuje určitou sociálně ekonomickou skutečnost, obecně nazýváme ukazatelem. V praxi se většinou nepracuje s jednotlivými izolovanými hodnotami, ale snažíme se porovnávat hodnoty mezi sebou, např. dvě hodnoty téhož ukazatele v různém období, na různých místech či v různých organizačních jednotkách. To znamená, že nás nezajímají pouze samotné hodnoty tohoto ukazatele, ale chceme určitou hodnotu vztáhnout i k hodnotě téhož ukazatele v jiném čase či prostoru.

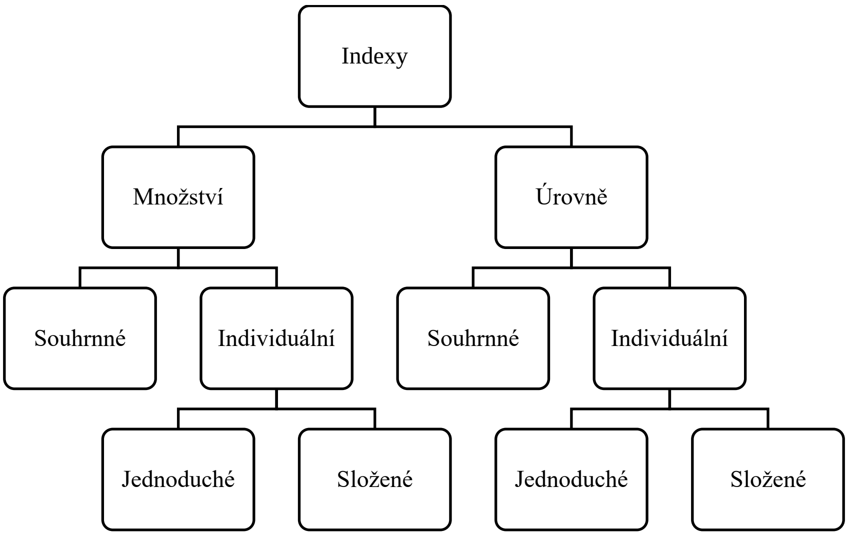
Jak už jsme uvedli v kapitole 1.2, dvěma základními možnosti srovnání hodnot ukazatele jsou srovnání **relativní** (indexem) a **absolutní** (absolutním rozdílem).

Index představuje relativní míru rozdílnosti. Jedná se o bezrozměrné číslo udávající, kolikrát je hodnota v čitateli větší či menší než hodnota ve jmenovateli. Absolutní přírůstek pak udává, o kolik měrných jednotek je hodnota menšence větší než hodnota menšitele.

3.2 Členění indexů

Indexy lze klasifikovat podle různých hledisek. Důležitým hlediskem při tomto dělení je hledisko **stejnorodosti** a hledisko **povahy srovnávaných ukazatelů**. Rozdělení indexů pak lze popsat schématem na obrázku 2.

Obrázek 2: Druhy indexů



Zdroj: Hindls a kol. (2004).

Členění indexů v první linii na indexy množství a indexy úrovně je členěním na indexy extenzitních ukazatelů (ukazatelů množství) a intenzitních ukazatelů (ukazatelů úrovně) a vychází jednoznačně z typu ukazatele, jehož dynamiku máme sledovat.

V druhé úrovni pak dělíme indexy na individuální a souhrnné. Toto třídění je dáno tím, zda jsou ukazatele stejnorodé (jeden výrobek v různých prodejnách) či nestejnorodé (jedna prodejna, různé výrobky).

Ve třetí úrovni pak indexy dělíme na indexy jednoduché (neprovádíme shrnování dílčích hodnot sledovaného ukazatele) a indexy složené (které vznikají shrnováním dílčích hodnot ukazatele).

Pro označení ukazatelů z hlediska jejich povahy je užívaná symbolika:

- pro extenzitní ukazatele – ukazatel množství (q), ukazatel hodnoty (Q)
- a pro intenzitní ukazatele – ukazatel ceny (p); $p = \frac{Q}{q}$.

Toto označení vychází ze vztahů mezi cenou, hodnotou a množstvím, pro které byla původně indexní teorie odvozena. Pro časové srovnání označujeme indexem 1 období běžné a indexem 0 období základní, se kterým ukazatel porovnáváme.

3.3 Jednoduché individuální indexy

Pomocí jednoduchých individuálních indexů srovnáváme například dvě hodnoty téhož ukazatele v různých časových obdobích. Tyto hodnoty nejsou nijak podrobněji členěny ani shrnovány.

Uveďme příklad: máme firmu, kde provádíme porovnání množství a tržeb za jednu jednotku (není potřeba provádět shrnování). V takovém případě užijeme jednoduchý individuální index extenzitních ukazatelů q a Q ve tvaru:

$$I_q = \frac{q_1}{q_0} \text{ pro množství,} \tag{3.3.1}$$

resp.

$$I_Q = \frac{Q_1}{Q_0} \text{ pro tržby.} \tag{3.3.2}$$

Odpovídající absolutní přírůstek pak bude mít tvar:

$$\Delta_q = q_1 - q_0, \qquad (3.3.3)$$

resp.

$$\Delta_Q = Q_1 - Q_0. \qquad (3.3.4)$$

Podobně postupujeme při porovnání intenzitního ukazatele u jedné jednotky. Porovnání provedeme pomocí jednoduchého individuálního indexu intenzitního ukazatele:

$$I_p = \frac{p_1}{p_0}. \qquad (3.3.5)$$

Absolutní přírůstek pak vyjádříme pomocí vztahu:

$$\Delta_p = p_1 - p_0. \qquad (3.3.6)$$

Ze vztahu extenzitních a intenzitních veličin dále platí že:

$$I_Q = I_p \cdot I_q. \qquad (3.3.7)$$

3.3.1 Bazické a řetězové indexy

Individuální jednoduché indexy (v našem případě výlučně časové) se často vyskytují v podobě časových řad. V takovém případě mohou být příslušné indexy počítané buď ke stejnému základu (bazické indexy) nebo k základu proměnlivému (řetězové indexy).

O bazickém indexu mluvíme v případě, že příslušné individuální jednoduché indexy jsou počítané vždy ke stejnému základu, např. k nejstarší hodnotě v časové řadě původních pozorování. Sto procent tedy odpovídá hodnotě prvního údaje (intervalu). Mějme hodnoty libovolného ukazatele, např. extenzitního ukazatele q v časovém období i, kde i = 1, 2, … , s. Zvolíme-li si základ srovnání hodnoty ukazatele q v období 1, tj. q_1, pak můžeme konstruovat řadu bazických indexů ve tvaru:

$$\frac{q_2}{q_1}, \frac{q_3}{q_1}, \ldots, \frac{q_s}{q_1}. \qquad (3.3.7)$$

Naopak o řetězovém indexu hovoříme v případě, kdy se základ srovnání mění a porovnáváme dvě za sebou jdoucí hodnoty v časové řadě, čili základem se vždy stává bezprostředně předcházející pozorování v časové řadě původních hodnot. Vyjdeme-li z předchozího příkladu s ukazatelem q, pak řetězové indexy budou ve tvaru:

$$\frac{q_2}{q_1}, \frac{q_3}{q_2}, \ldots, \frac{q_s}{q_{s-1}}. \tag{3.3.8}$$

Pro převod řetězových a bazických indexů lze využít tzv. **řetězení indexů**. Ze vztahů (3.3.7) a (3.3.8) plyne, že bazické a řetězové indexy lze vzájemně přepočítávat. Tak můžeme například získat pomocí postupného násobení řetězových indexů indexy bazické. Pokud naopak vydělíme dva bazické indexy zachycující dvě po sobě následující období, získáme odpovídající index řetězový.

Z výše uvedené extenzitní veličiny můžeme dělením dvou bazických indexů počítat řetězové:

$$\frac{q_3}{q_1} : \frac{q_2}{q_1} = \frac{q_3}{q_2} \text{ atd.}$$

a naopak násobením řetězových indexů získat indexy bazické:

$$\frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{q_3}{q_2} \cdot \frac{q_4}{q_3} = \frac{q_4}{q_1} \text{ atd.}$$

V případě, že nemáme k dispozici původní hodnoty časové řady, ale pouze již existující indexy, k dalším výpočtům a přepočtům mezi indexy tedy můžeme využít následující vztah:

$$R_i = \frac{B_i}{B_{i-1}}, \tag{3.3.9}$$

kde R_i je řetězový index v i-tém období, B_i bazický index v i-tém období a B_{i-1} bazický index v (i-1)tém období.

Zároveň platí

$$B_i = R_i \cdot B_{i-1}. \tag{3.3.10}$$

Poznámka:

Při převodu indexů v obou směrech musíme dávat velký pozor na zacházení s jednotkami. Při dělení a především při násobení se pracuje s desetinnými čísly, nikoli s procenty!

3.3.2 Cvičení

Řešené příklady

Příklad 1

V tabulce je uvedena časová řada objemu produkce ve sledovaném podniku v letech 2013 až 2018. Charakterizujte vývoj objemu produkce pomocí bazických indexů (základním obdobím je rok 2013) a řetězových indexů.

Rok	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Produkce [v tis.]	89,3	91,6	93,5	96,1	97,4	96,5

Zdroj: vlastní

Řešení:

Bazické indexy (ukázka výpočtu podle vzorce 3.3.7)

$$B_{2014} = \frac{P_{2014}}{P_{2013}} = \frac{91{,}6}{89{,}3} = 1{,}026$$

$$B_{2015} = \frac{P_{2015}}{P_{2013}} = \frac{93{,}5}{89{,}3} = 1{,}047$$

$$B_{2016} = \frac{P_{2016}}{P_{2013}} = \frac{96{,}1}{89{,}3} = 1{,}076$$

atd.

Řetězové indexy (ukázka výpočtu podle vzorce 3.3.8)

$$R_{2014} = \frac{P_{2014}}{P_{2013}} = \frac{91{,}6}{89{,}3} = 1{,}026$$

$$R_{2015} = \frac{P_{2015}}{P_{2014}} = \frac{93{,}5}{91{,}6} = 1{,}021$$

$$R_{2016} = \frac{P_{2016}}{P_{2015}} = \frac{96{,}1}{93{,}5} = 1{,}028$$

atd.

Rok	Produkce [v tis.]	Bazický index		Řetězový index	
		Původní tvar	%	Původní tvar	%
2013	89,3	1,000	100,0	n/a	n/a
2014	91,6	1,026	102,6	1,026	102,6
2015	93,5	1,047	104,7	1,021	102,1
2016	96,1	1,076	107,6	1,028	102,8
2017	97,4	1,091	109,1	1,014	101,4
2018	96,5	1,081	108,1	0,991	99,1

Zdroj: vlastní

Příklad 2

Je dána řada řetězových měsíčních indexů za rok 2019.

Měsíc	Leden	Únor	Březen	Duben
Řetězové indexy (%)	102,6	98,7	111,0	102,6

Zdroj: vlastní

a) Vypočtěte řadu odpovídajících bazických indexů, kde základním obdobím bude prosinec 2018.

b) Řadu řetězových indexů přepočtěte na bazické, kde základním obdobím bude leden 2019.

Řešení:

a)

Všechny údaje je v první řadě třeba převést na desetinná čísla. Poté počítáme:

$B_{Leden} = R_i \cdot B_{i-1} = R_{Leden} \cdot B_{Prosinec} = 1{,}026 \cdot 1{,}000 = 1{,}026$

$B_{Únor} = 0{,}987 \cdot 1{,}026 = 1{,}013$

$B_{Březen} = 1{,}11 \cdot 1{,}013 = 1{,}124$

atd.

Měsíc	Prosinec	Leden	Únor	Březen	Duben
Řetězové indexy (%)	n/a	102,6	98,7	111,0	102,6
Řetězové indexy	n/a	1,026	0,987	1,110	1,026
Bazické indexy (prosinec 2018 = 100)	1,000	1,026	1,013	1,124	1,153

b)

$B_{Únor} = R_i \cdot B_{i-1} = R_{Únor} \cdot B_{Leden} = 0{,}987 \cdot 1{,}000 = 0{,}987$

$B_{Březen} = 1{,}11 \cdot 0{,}987 = 1{,}096$

$B_{Duben} = 1{,}026 \cdot 1{,}096 = 1{,}124$

Měsíc	Leden	Únor	Březen	Duben
Řetězové indexy (%)	102,6	98,7	111,0	102,6
Řetězové indexy	1,026	0,987	1,110	1,026
Bazické indexy (leden 2019 = 100)	1,000	0,987	1,096	1,124

Příklad 3

O vývoji počtu zaměstnaných a nezaměstnaných v ČR máme k dispozici následující údaje (v tisících)[12].

Rok	2015	2016	2017	2018
Nezaměstnaní	268,0	211,4	155,5	121,6
Zaměstnaní	5 041,9	5 138,6	5 221,6	5 293,8

Určete:

a) bazické indexy charakterizující vývoj počtu nezaměstnaných ve vztahu k roku 2015,

b) meziroční přírůstky počtu nezaměstnaných (absolutně i relativně),

c) průměrné roční tempo růstu počtu nezaměstnaných v letech 2015 až 2018 a

d) meziroční přírůstky míry nezaměstnanosti počítané jako podíl počtu zaměstnaných a součtu počtu zaměstnaných a nezaměstnaných.

Řešení:

a)

Základem je rok 2015, pro nějž tedy bazický index bude roven 1,00.

$$B_{2016,nezam.} = \frac{211{,}4}{268{,}0} = 0{,}789$$

$$B_{2017,nezam.} = \frac{155{,}5}{268{,}0} = 0{,}578$$

$$B_{2018,nezam.} = \frac{121{,}6}{268{,}0} = 0{,}454$$

[12] Zdroj: Vlastní výpočet dle tabulky M000112a Databáze národních účtů ČSÚ. Údaje ke dni 12. 8. 2019.

Rok	2015	2016	2017	2018
Nezaměstnaní	268,0	211,4	155,5	121,6
Bazické indexy (2015)	1,00	0,789	0,578	0,454

b)

Absolutně:

$N_{2016} - N_{2015} = 211,4 - 268,0 = -56,6$

$N_{2017} - N_{2016} = 155,5 - 211,4 = -55,9$

atd.

Relativně:

$$\frac{N_{2016}}{N_{2015}} = \frac{211,4}{268,0} = 0,789$$

$$\frac{N_{2017}}{N_{2016}} = \frac{155,5}{211,4} = 0,736$$

$$\frac{N_{2018}}{N_{2017}} = \frac{121,6}{155,5} = 0,782$$

Převedení na přírůstky (v %): $(0,789 - 1) \cdot 100\ \% = (-0,211) \cdot 100\ \% = -21,1\ \%$

Rok	2015	2016	2017	2018
Nezaměstnaní	268,0	211,4	155,5	121,6
Absolutní přírůstky	x	-56,6	-55,9	-33,9
Relativní přírůstky (%)	x	-21,1	-26,4	-21,8

c)

Musíme počítat geometrický průměr:

$$\bar{y}_G = \sqrt[3]{0,789 \cdot 0,736 \cdot 0,782} = \sqrt[3]{\frac{121,6}{268,0}} = 0,768$$

Průměrný roční koeficient růstu je 0,768, průměrné roční tempo poklesu je 23,2 %.

d)

$$\text{Míra nezaměstnanosti}_{2015} = \frac{\text{Nezaměstnaní}}{\text{Zaměstnaní + Nezaměstnaní}} = \frac{268,0}{268,0 + 5041,9} =$$

$= \frac{268{,}0}{5309{,}9} = 0{,}0505$

Rok	2015	2016	2017	2018
Nezaměstnaní	268,0	211,4	155,5	121,6
Zaměstnaní	5 041,9	5 138,6	5 221,6	5 293,8
Míra nezaměstnanosti (%)	5,05	3,95	2,89	2,25
Přírůstky (rozdíl míry nezaměstnanosti v procentních bodech)	x	-1,10	-1,06	-0,64

<u>Příklad 4</u>

Vývoj výdajů domácností na konečnou spotřebu v ČR (dále pro tento příklad zjednodušeně jen „konečná spotřeba domácností“) v letech 2014–2018 v běžných cenách charakterizují bazické indexy se základem v roce 2016[13].

Rok	2014	2015	2016	2017	2018
Bazické indexy (%)	92,4	96,0	100,0	106,7	112,7

a) Určete meziroční tempa růstu (v %) konečné spotřeby domácností v letech 2015–2018.

b) Určete absolutní velikost konečné spotřeby domácností v letech 2014–2018, víte-li, že konečná spotřeba domácností v roce 2017 činila 2 361,3 mld. Kč.

Řešení:

a)

Nejprve převedeme bazické indexy na řetězové.

$$R_{2015} = \frac{B_{2015}}{B_{2014}} = \frac{96{,}0}{92{,}4} = 1{,}039$$

$$R_{2016} = \frac{B_{2016}}{B_{2015}} = \frac{100{,}0}{96{,}0} = 1{,}042$$

$$R_{2017} = \frac{B_{2017}}{B_{2016}} = \frac{106{,}4}{100} = 1{,}067$$

$$R_{2018} = \frac{B_{2018}}{B_{2017}} = \frac{112{,}7}{106{,}7} = 1{,}056$$

[13] Zdroj: Vlastní výpočet dle tabulky M000112a Databáze národních účtů ČSÚ. Údaje ke dni 12. 8. 2019.

Z řetězových indexů zjistíme tempo růstu

$1{,}039 \Longrightarrow 3{,}9\ \%$,

$1{,}042 \Longrightarrow 4{,}2\ \%$,

$1{,}067 \Longrightarrow 6{,}7\ \%$ a

$1{,}056 \Longrightarrow 5{,}6\ \%$.

b)

V roce 2018 konečná spotřeba domácností vzrostla o 5,6 %, vyjdeme-li ze známé hodnoty konečné spotřeby z roku 2017, bude konečná spotřeba v roce 2017 rovna

2 361,3 · 1,056 = 2 493,5.

Pro rok 2016: konečná spotřeba vzrostla mezi lety 2016 a 2017 o 6,7 %. Pokud chceme zjistit hodnotu konečné spotřeby v roce 2016, musíme hodnotu konečné spotřeby v roce 2017 dělit koeficientem růstu k_{2017} (resp. R_{2017} vypočtený v bodu a), tj.

2 361,3 : 1,067 = 2 213,0.

Pro ostatní roky je postup stejný.

Rok	2014	2015	2016	2017	2018
Bazické indexy (%)	92,4	96,0	100,0	106,7	112,7
Řetězové indexy = k_t	x	1,039	1,042	1,067	1,056
Tempa růstu (%)	x	3,9	4,2	6,7	5,6
Konečná spotřeba domácností	2 044,1	2 123,8	2 213,0	2 361,3	2 493,5

Neřešené příklady

Příklad 1

Uvedenou řadu bazických indexů (základním obdobím je rok 2010) převeďte na indexy řetězové.

Rok	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Bazické indexy	1,009	1,014	1,022	1,030	1,043	1,050

Zdroj: vlastní

Příklad 2

Danou řadu bazických indexů, kde základním obdobím je prosinec 2018, přepočtěte na bazické indexy, kde bude základním obdobím leden 2019.

Měsíc	Leden	Únor	Březen	Duben
Bazické indexy (%)	102,6	98,7	111,0	102,6

Zdroj: vlastní

Příklad 3

Následující tabulka uvádí, jak v jednotlivých měsících roku rostla cenová hladina oproti prosinci předcházejícího roku.

Měsíc	Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen
Bazické indexy (%)	100,9	101,4	102,2	103,0	104,3	105,0

Zdroj: vlastní

Určete:

a) jak se změnila cenová hladina v květnu proti únoru,
b) kolik procent měsíčně rostla průměrně cenová hladina ve 2. čtvrtletí,
c) kolik by činilo zvýšení cenové hladiny na konci roku proti prosinci předcházejícího roku, pokud by ceny ve 2. pololetí rostly stejně jako v 1. pololetí.

Příklad 4

Vývoj zaměstnanosti v zemi Cipískov charakterizují meziroční tempa růstu (v %) uvedená v tabulce.

Rok	2015	2016	2017	2018
Meziroční tempo růstu (%)	1,6	–1,4	–1,0	–0,4

Zdroj: vlastní

Charakterizujte vývoj zaměstnanosti v Cipískově v letech 2015–2018 pomocí bazických indexů

a) se základem v roce 2015,
b) se základem v roce 2018.

Výsledky

Příklad 1

Rok	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Řetězové indexy	1,009	1,005	1,008	1,008	1,013	1,007

Příklad 2

Měsíc	Leden	Únor	Březen	Duben
Bazické indexy (%; leden)	100,0	96,2	108,2	100,0

Příklad 3

a) růst o 2,9 %

b) růst o 0,9 %

c) růst o 10,25 %

Příklad 4

Rok	2015	2016	2017	2018
Bazický index (2015)	1,016	1,002	0,992	0,988
Bazický index (2018)	1,024	1,010	1,000	0,996

3.4 Složené individuální indexy

Složené individuální indexy představují indexy stejnorodého extenzitního nebo intenzitního ukazatele, kdy dílčí hodnoty daného ukazatele shrnujeme za celek. Můžeme si představit celkové mzdové náklady, které jsou součinem hodinové mzdové sazby a počtu odpracovaných hodin. Hodnoty extenzitních ukazatelů Q (celkové mzdové náklady) a q (počet odpracovaných hodin) shrnujeme pomocí úhrnu, hodnoty intenzitního ukazatele p (hodinovou mzdovou sazbu) shrnujeme pomocí průměru. Složený individuální index extenzitních ukazatelů q, resp. Q lze tedy zapsat ve tvaru:

$$I_{\sum q} = \frac{\sum q_1}{\sum q_0}, \qquad (3.4.1)$$

resp.

$$I_{\sum Q} = \frac{\sum Q_1}{\sum Q_0}. \qquad (3.4.2)$$

Pro odpovídající absolutní přírůstek pak platí:

$$\Delta_{\sum q} = \sum q_1 - \sum q_0 \,, \tag{3.4.3}$$

resp.

$$\Delta_{\sum Q} = \sum Q_1 - \sum Q_0 \,. \tag{3.4.4}$$

U intenzitního ukazatele součet není možný, ukazatele p můžeme shrnovat pouze pomocí váženého aritmetického průměru, kde jako váhy užijeme strukturu extenzitního ukazatele q.

Takto vytvořený index se nazývá index proměnlivého složení (jeho rozklad je vysvětlen v kapitole 4):

$$I_{\bar{p}} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} = \frac{\dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\dfrac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}} = \frac{\dfrac{\sum Q_1}{\sum q_1}}{\dfrac{\sum Q_0}{\sum q_0}} \,, \tag{3.4.5}$$

odpovídající absolutní přírůstek má tvar

$$\Delta_{\bar{p}} = \bar{p}_1 - \bar{p}_0 = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} - \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{\sum Q_1}{\sum q_1} - \frac{\sum Q_0}{\sum q_0} \,. \tag{3.4.6}$$

Pro složené indexy můžeme následně použít vztahy pro bazické a řetězové indexy, vysvětlené v předchozí kapitole.

3.4.1 Cvičení

Řešené příklady

Příklad 1

Mějme údaje o výměře a hektarových výnosech pšenice ve třech podnicích vybraného regionu v letech 2017 a 2018:

Podnik	Výměra (ha)		Průměrný hektarový výnos (t/ha)	
	2017	2018	2017	2018
A	600	650	5,4	5,5
B	550	450	6,5	6,2
C	250	400	5,7	5,8

Zdroj: vlastní

Určete:

a) změnu výměry pšenice a změnu průměrného hektarového výnosu v jednotlivých podnicích
b) změnu výměry pšenice za podniky celkem,
c) změnu celkových výnosů pšenice mezi roky 2017 a 2018 a
d) změnu průměrného hektarového výnosu celkem.

Řešení:

Výměra (ha): q

Průměrný hektarový výnos (t/ha): p

Celkový výnos pšenice: $Q = p \cdot q$

a) Výpočty si můžeme uspořádat do tabulky.

Podnik	q_0	q_1	p_0	p_1	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1	p_1q_0
A	600	650	5,4	5,5	3 240	3 575	3 510	3 300
B	550	450	6,5	6,2	3 575	2 790	2 925	3 410
C	250	400	5,7	5,8	1 425	2 320	2 280	1 450
∑	1 400	1 500	17,6	17,5	8 240	8 685	8 715	8 160

Podník A:

Změna výměry:

relativně: $\frac{q_1}{q_0} = \frac{650}{600} = 1{,}083$ absolutně: $\Delta =$ 650 – 600 = 50 ha

Výměra podniku A v roce 2018 oproti roku 2017 vzrostla o 50 hektarů, tj. o 8,3 %.

Změna průměrného hektarového výnosu:

relativně: $\frac{p_1}{p_0} = \frac{5{,}5}{5{,}4} = 1{,}019$ absolutně: $\Delta =$ 5,5 – 5,4 = 0,1 t/ha

Průměrný hektarový výnos podniku A v roce 2013 oproti roku 2012 vzrostl o 0,1 t/ha, tj. o 1,9 %.

Podnik B:

Změna výměry:

relativně: $\frac{q_1}{q_0} = \frac{450}{550} = 0{,}818$ absolutně: Δ = 450 – 550 = –100 ha

Výměra podniku B v roce 2018 oproti roku 2017 klesla o 100 hektarů, tj. o 18,2 %.

Změna průměrného hektarového výnosu:

relativně: $\frac{p_1}{p_0} = \frac{6{,}2}{6{,}5} = 0{,}954$ absolutně: Δ = 6,2 – 6,5 = –0,3 t/ha

Průměrný hektarový výnos podniku B v roce 2018 oproti roku 2017 klesl o 0,3 t/ha, tj. o 4,6 %.

Podnik C:

Změna výměry:

relativně: $\frac{q_1}{q_0} = \frac{400}{250} = 1{,}600$ absolutně: Δ = 400 – 250 = 150 ha

Výměra podniku C v roce 2018 oproti roku 2017 vzrostla o 150 hektarů, tj. o 60 %.

Změna průměrného hektarového výnosu:

relativně: $\frac{p_1}{p_0} = \frac{5{,}8}{5{,}7} = 1{,}018$ absolutně: Δ = 5,8 – 5,7 = 0,1 t/ha

Průměrný hektarový výnos podniku C v roce 2018 oproti roku 2017 vzrostl o 0,1 t/ha, tj. o 1,8 %.

b) individuální složený index množství

$$I_{\sum q} = \frac{\sum q_1}{\sum q_0} = \frac{1500}{1400} = 1{,}071$$

$$\Delta_{\sum q} = \sum q_1 - \sum q_0 = 1500 - 1400 = 100 \text{ ha}$$

Celková výměra pšenice v roce 2018 oproti roku 2017 vzrostla o 7,1 %, tj. je růst o 100 ha.

c) individuální složený hodnotový index

$$I_{\sum Q} = \frac{\sum Q_1}{\sum Q_0} = \frac{8685}{8240} = 1{,}054$$

$$\Delta_{\sum Q} = \sum Q_1 - \sum Q_0 = 8685 - 8240 = 445 \text{ t}$$

Celkové výnosy pšenice v roce 2018 oproti roku 2017 vzrostly o 445 tun, tj. o 5,4 %.

d) individuální složený index úrovně – index proměnlivého složení

$$I_{\bar{p}} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} = \frac{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}} = \frac{\frac{\sum Q_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum Q}{\sum q_0}} = \frac{\frac{8685}{1500}}{\frac{8240}{1400}} = \frac{5,79}{5,88} = 0,985$$

$$\Delta_{\bar{p}} = \bar{p}_1 - \bar{p}_0 = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} - \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{\sum Q_1}{\sum q_1} - \frac{\sum Q}{\sum q_0} = \frac{8685}{1500} - \frac{8240}{1400} = 5,79 - 5,88 = -0,09$$

Ve sledovaném období došlo v podnicích celkem k poklesu průměrného hektarového výnosu o 0,09 t/ha na 98,5 %, tj. o 1,5 %.

Příklad 2

Mějme údaje o pracovnících a platech ve vybraných odvětvích z let 2012 a 2013:

Odvětví	Počty zaměstnanců [tis.]		Průměrná měsíční mzda [Kč]		Objem mezd [tis.Kč]	
	2012	2013	2012	2013	2012	2013
Textilní průmysl	93,8	84,9	10 632	11 405	997 281,6	968 284,5
Stavebnictví	253,6	256,1	15 216	16 039	3 858 777,6	4 107 588,0
Zpracování dřeva	46,0	45,3	11 647	12 484	535 762,0	565 525,2

Zdroj: vlastní

Určete:

a) změnu počtu zaměstnanců a změnu průměrné mzdy v jednotlivých odvětvích,

b) změnu průměrné mzdy za vybraná odvětví celkem,

c) změnu objemu celkových mezd ve vybraných odvětvích.

Řešení

Počty zaměstnanců – extenzitní ukazatel – *q*

Průměrná mzda – intenzitní ukazatel – *p*

Objem mezd – *Q*

a) Výpočty si můžeme uspořádat do tabulky.

Odvětví	q_0	q_1	p_0	p_1	q_1/q_0	$q_1–q_0$	p_1/p_0	$p –p_0$
Textilní průmysl	93,8	84,9	10 632	11 405	0,905	-8,9	1,073	773
Stavebnictví	253,6	256,1	15 216	16 039	1,009	2,5	1,054	823
Zpracování dřeva	46,0	45,3	11 647	12 484	0,985	-0,7	1,072	837
$\sum$	393,4	386,3	x	x	x	x	x	x

Textilní průmysl:

$I_q = 0{,}905$ $\Delta_q =$ –8,9 tis. pracovníků

$I_p = 1{,}073$ $\Delta_p =$ 773 Kč

Stavebnictví:

$I_q = 1{,}009$ $\Delta_q =$ 2,5 tis. pracovníků

$I_p = 1{,}054$ $\Delta_p =$ 823 Kč

Zpracování dřeva:

$I_q = 0{,}985$ $\Delta_q = -0{,}7$ tis. pracovníků

$I_p = 1{,}072$ $\Delta_p =$ 837 Kč

b) Výpočty si můžeme uspořádat do tabulky.

Odvětví	p_0q_0	p_1q_1
Textilní průmysl	997 281,6	968 284,5
Stavebnictví	3 858 777,6	4 107 588,0
Zpracování dřeva	535 762,0	565 525,2
$\sum$	5 391 821,2	5 641 398,0

$$I_{\bar{p}} = \frac{\frac{5\,641\,398{,}0}{386{,}3}}{\frac{5\,391\,821{,}2}{393{,}4}} = \frac{14\,603{,}67}{13\,705{,}7} = 1{,}066$$

$\Delta_{\bar{p}} = 897{,}97$ Kč

c)

$I_{\sum Q} = 1{,}046$ $\Delta_{\sum Q} =$ 294 576,8 tis. Kč

Další příklad aplikace rozkladu indexu proměnlivého složení můžeme najít například v článku Fischer a kol. (2013), s. 59 a následující, kde jsme prováděli analýzu vlivu produktivity práce v odvětví ICT na celkovou produktivitu práce v národním hospodářství.

3.5 Souhrnné indexy

Souhrnné indexy představují velice širokou paletu indexů, jejichž úkolem je charakterizovat změnu (dynamiku) nestejnorodých ukazatelů (extenzitních i intenzitních). Jedná se např. o změnu objemu produkce vyjádřené v různých jednotkách, celkovou změnu ceny různorodé produkce či celkovou změnu produktivity práce při výrobě různých výrobků.

Jsou to ukazatele nesouměřitelné, jejichž součet nemá z důvodu věcné rozdílnosti těchto dílčích hodnot význam. Vyvstává zde tedy problém, jak vyjádřit souhrnnou změnu veličiny, jejíž dílčí hodnoty nelze shrnovat součtem (typicky v případě, kdy v jedné prodejně prodáváme různé druhy výrobků a nemá například smysl sčítat prodaných 20 kg jablek, 5 litrů moštu a 10 kusů ananasu; číselný součet 35 nemá v tomto případě žádný věcný význam).

K výpočtu souhrnu dílčích hodnot extenzitních i intenzitních veličin se zde využívá průměrování změn dílčích hodnot sledovaného ukazatele, vyjádřených pomocí individuálních jednoduchých indexů.

Koncepce souhrnných indexů je proto založena na průměrování individuálních jednoduchých indexů nestejnorodého intenzitního či extenzitního ukazatele, a to formou prostého nebo váženého aritmetického, harmonického či geometrického průměru.

Volba typu průměru (prostý či vážený) a popř. volba vah od sebe odlišuje jednotlivé generace souhrnných indexů.

3.5.1 Souhrnné indexy 1. generace

První generace souhrnných indexů **vychází z prostých průměrů** individuálních jednoduchých indexů nestejnorodého ukazatele.

Zpravidla se jedná o aritmetický průměr

$$I_p = \frac{1}{n}\sum \frac{p_1}{p_0} = \frac{\sum I_{p_i}}{n}, \tag{3.5.1}$$

existuje však i varianta harmonického průměru

$$I_p = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{I_{p_i}}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{p_{1,i}}{p_{0,i}}}}, \tag{3.5.2}$$

popř. geometrický průměr jednoduchých indexů

$$I_p = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} I_{p_i}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{p_{1,i}}{p_{0,i}}}. \tag{3.5.3}$$

Indexy v těchto tvarech ale nenašly širší uplatnění v praxi. Použití prostých průměrů abstrahuje od závažnosti změny vyjádřené jednoduchým indexem. (Pro spotřebitele je závažnější, vzroste-li cena masa o 50 % a soli o 10 % než naopak.)

Problémy indexů první generace, tj. nerespektování závažnosti změny vyjádřené jednoduchým indexem, řeší indexy druhé generace.

3.5.2 Souhrnné indexy 2. generace

Indexy druhé generace se opírají na rozdíl od indexů první generace o vážené průměry jednoduchých indexů. Váhy jsou odvozeny od struktury extenzitního ukazatele Q, a to buď v základním (0) nebo běžném (1) období, tj. $Q_0 = p_0 \cdot q_0$ nebo $Q_1 = p_1 \cdot q_1$.

Souhrnný index charakterizující změnu vytvořené hodnoty nazýváme **index hodnotový**[14]:

$$I_Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{1,i} q_{1,i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{0,i} q_{0,i}}, \tag{3.5.4}$$

absolutní vyjádření má pak tvar:

$$\Delta_Q = \sum_{i=1}^{n} p_{1,i} q_{1,i} - \sum_{i=1}^{n} p_{0,i} q_{0,i} \tag{3.5.5}$$

Výše popsaný hodnotový index (I_Q) lze rozložit na součin dvou indexů, z nichž jeden představuje vliv změny úrovně (obvykle ceny – I_p) a druhý vliv změny množství (I_q). Tento druhý index (I_q) nazýváme **index fyzického objemu**.

$$I_Q = I_p \cdot I_q \tag{3.5.6}$$

[14] Hodnotový index (3.5.4) a váhy (3.5.7) a (3.5.8) jsou uvedeny v úplném tvaru včetně indexů součtu, pro zjednodušení budeme další indexy a absolutní rozdíly uvažovat ve zjednodušeném tvaru bez těchto indexů.

Indexy 2. generace se snaží vyřešit problém 1. generace, které nerespektují závažnost změn. Řešení se nabízí v podobě pouze vážených průměrů jednoduchých individuálních indexů, kde ve funkci vah (w) vystupuje struktura extenzitního ukazatele Q, a to buď v situaci 0 (základní období)

$$w_{0,i} = \frac{Q_{0,i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{0,i}} = \frac{p_{0,i}q_{0,i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{0,i}q_{0,i}} \tag{3.5.7}$$

nebo 1 (běžné období)

$$w_{1,i} = \frac{Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{1,i}} = \frac{p_{1,i}q_{1,i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{1,i}q_{1,i}}. \tag{3.5.8}$$

Souhrnné indexy mají potom tvar váženého buď aritmetického nebo harmonického průměru individuálních jednoduchých indexů s vahami $w_{0,i}$, resp. $w_{1,i}$.

V praxi našly nejširší uplatnění indexy známé podle jmen jejich autorů – podle Etienna **Laspayrese** (1834–1913) a Hermanna **Paascheho** (1851–1925), kdy Laspayres uvažuje váhy ze základního (0) a Paasche z běžného období (1).

Zjevnou nevýhodou souhrnných indexů druhé generace je závislost hodnoty indexu na volbě vah, neboť je zřejmé, že indexy nám poskytují vždy dva různé, ale zároveň stejně hodnotné výsledky.

Souhrnné indexy úrovně (cenové indexy)

Souhrnným indexem úrovně rozumíme obecně souhrnné indexy libovolného nestejnorodého intenzitního ukazatele p, i když výklad těchto charakteristik dále soustředíme především na problematiku souhrnných cenových indexů, tj. p = cena. Cenové indexy totiž patří k nejstarším oficiálním statistikou sledovaným indexům.

Jak jsme již zmínili výše, základním konceptem v praxi používaných souhrnných indexů je myšlenka váženého průměrování individuálních jednoduchých indexů s vahami buď ze základního, či z běžného období.

Laspeyresův cenový index uvažujeme jako vážený aritmetický průměr individuálních cenových indexů. Váhy představují množství ze základního období. Základní tvar vzorce můžeme převést do tzv. agregátního tvaru, z něhož vyplývá další možnost interpretace Laspayresova indexu:

$$I_p^L = \sum I_p w_0 = \frac{\sum \frac{p_1}{p_0} \cdot p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}, \tag{3.5.9}$$

resp. absolutní rozdíl:

$$\Delta_p^L = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 . \tag{3.5.10}$$

Tento index a absolutní rozdíl srovnává dvě cenové hladiny, u indexu ve jmenovateli posledního výrazu je objem zboží sledovaný v základním období oceněn cenami ze stejného období (t=0), jedná se tedy o reálnou veličinu. V čitateli pak najdeme hypotetickou veličinu, ve které je tentýž objem zboží oceněn cenami platnými v běžném období (t=1). Srovnáváme tedy dva stejné objemy zboží oceněné různými cenami. Převedeno do každodenní praxe, můžeme říci, že Laspeyresův cenový index srovnává částky, které bychom za stejný objem zboží, pořízený v základním období, vydali v běžném období. Je používán např. pro index spotřebitelských cen, od něhož je pak odvozována jak meziroční, tak průměrná roční míra inflace[15].

Jestliže výše uvedený index používá k průměrování individuálních jednoduchých indexů cen vah ze základního období, pak další logickou možností je využití vah z běžného období, které využívá Paascheho cenový index.

Paascheho cenový index je harmonickým průměrem, v němž jako váhy uvažujeme množství z období běžného (1):

$$I_p^P = \frac{1}{\sum \frac{w_1}{I_p}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{p_1 q_1}{\frac{p_1}{p_0}}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}, \tag{3.5.11}$$

[15] Podrobněji o těchto ukazatelích odvozených od bazického indexu spotřebitelských cen píše Košťáková (2019), s. 60.

resp. absolutní rozdíl:

$$\Delta_p^P = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 \,. \tag{3.5.12}$$

Tento index opět srovnává dvě cenové hladiny, ale tentokrát aplikované na stejné objemy zboží pocházející z běžného období. Obecně tedy můžeme říci, že Paascheho cenový index srovnává částky, které bychom za stejný objem zboží pořízeného v běžném období vydali v základním období.

Vzhledem k tomu, že desítky let existují oba indexy současně a jejich vypovídací schopnost je obdobná, je při prováděných analýzách vždy třeba doplnit poznámku, který z uvedených dvou indexů byl použit, resp. zda změna cenové hladiny byla porovnávána na množství ze základního či z běžného období. Problém rozdílnosti vah těchto dvou indexů řeší třetí generace souhrnných indexů (viz dále).

Na principu Paascheho cenového indexu je sestavován deflátor hrubého domácího produktu, s nímž se seznámíme v dalších statistických kurzech. Obecně Laspeyeresův index použijeme tam, kde preferujeme rychlost zpracování, Paascheho index je zase vhodnější při preferenci aktuálních vah.

‚Souhrnné indexy množství (objemové indexy)

Souhrnné indexy množství jsou indexy nestejnorodého extenzivního ukazatele q. Podávají informaci o změnách objemu (obvykle vytvořené či prodané produkce); jinými slovy, jejich úkolem je charakterizovat změny objemu vytvořené nebo prodané různorodé produkce za předpokladu, že nelze z důvodu věcné rozdílnosti sestrojit veličinu $\sum q_i$. Jejich konstrukce vychází ze stejné myšlenky jako u souhrnných cenových indexů, jejich konstrukce je tedy analogická konstrukci cenových indexů.

Laspeyresův objemový index je indexem ve tvaru aritmetického průměru individuálních objemových indexů, jako váhy uvažujeme množství z období základního:

$$I_q^L = \sum I_q w_0 = \frac{\sum \frac{q_1}{q_0} \cdot p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}, \tag{3.5.13}$$

resp. absolutní rozdíl:

$$\Delta_q^L = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 \,. \tag{3.5.14}$$

Po převodu tohoto objemového tvaru získáváme opět agregátní tvar souhrnného objemového indexu, který srovnává dva objemy produkce vyjádřené ve stejných cenách, v tomto případě v cenách základního období. Často se můžeme setkat s označením *změna fyzického objemu produkce*, čímž se rozumí změna objemu produkce ve stálých (srovnatelných) cenách.Příkladem tohoto indexu je například index průmyslové produkce, s nímž se seznámíme v budoucích kurzech hospodářské statistiky.

Stejně jako u cenových indexů, i u objemových indexů můžeme uvažovat i váhy z běžného období. Těchto vah využívá Paascheho objemový index.

Paascheho objemový index je index ve tvaru harmonického průměru, kde jako váhy uvažujeme množství z období běžného

$$I_q^P = \frac{1}{\sum \frac{w_1}{I_q}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{p_1 q_1}{\frac{q_1}{q_0}}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0} \,, \tag{3.5.15}$$

resp. absolutní rozdíl:

$$\Delta_q^P = \sum p_1 q_1 - \sum p_1 q_0 \,. \tag{3.5.16}$$

Po převodu tohoto objemového indexu stejně jako u Laspayrese získáváme agregátní tvar, kde můžeme vidět, že srovnáváme dva objemy produkce oceněné stejnými cenami, tentokrát z běžného období.

Interpretace těchto indexů vychází jednoznačně z jejich konstrukce.

Hodnotový index I_Q pak odpovídá součinu cenového a objemového souhrnného indexu. Jelikož však existují oba indexy ve dvou variantách, rozklad indexu I_Q je pak následující:

$$I_Q = I_p^L \cdot I_q^P = I_p^P \cdot I_q^L \tag{3.5.17}$$

3.5.3 Souhrnné indexy 3. generace

Jak jsme již uvedli, problém indexů druhé generace spočívá v závislosti indexů na volbě vah, neboť výsledky indexů druhé generace nám poskytují téměř vždy dva různé, ale stejně hodnotné výsledky[16]. Indexy 3. generace se snaží tento problém řešit různými způsoby, např.:

- průměrováním indexů s různými vahami,
- průměrováním vah,
- volbou vah z jiného období,

případně dalšími způsoby. Všechny indexy 3. generace můžeme opět rozdělit na souhrnné cenové a objemové indexy.

Fisherův souhrnný index představuje geometrický průměr Laspeyresova a Paascheho indexu. Fisherův cenový index má tvar:

$$I_p^F = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P} = \sqrt{\frac{p_1 q_0}{p_0 q_0} \cdot \frac{p_1 q_1}{p_0 q_1}}\,, \tag{3.5.18}$$

obdobně Fisherův objemový index lze psát ve tvaru:

$$I_q^F = \sqrt{I_q^L \cdot I_q^P} = \sqrt{\frac{p_0 q_1}{p_0 q_0} \cdot \frac{p_1 q_1}{p_1 q_0}}\,. \tag{3.5.19}$$

Problémem širšího využití Fisherova indexu, který je kompromisem mezi Paascheho a Laspeyresovým indexem, je jeho vypovídací schopnost. Nelze ho totiž interpretovat jinak, než jako průměr z výše uvedených indexů, a jako průměr má smysl především tehdy, pokud se průměrované hodnoty od průměru příliš neliší.

Edgeworthův-Marshallův index je založen na průměrování vah. Jeho tvar pro intenzitní ukazatel můžeme psát jako

$$I_p = \frac{\sum p_{1,i}(q_1 + q_0)}{\sum p_{0,i}(q_1 + q_0)} \tag{3.5.20}$$

[16] Důvody rozdílnosti těchto indexů nám vysvětluje tzv. Bortkiewiczův rozklad.

a pro extenzitní ukazatel

$$I_q = \frac{\sum q_{1,i}(p_1 + p_0)}{\sum q_{0,i}(p_1 + p_0)}. \tag{3.5.21}$$

Loweho index je založen na využití vah z jiného, hypotetického období např. z období *k*. Pro intenzitní ukazatel má tento index tvar:

$$I_p = \frac{\sum p_{1,i} q_{k,i}}{\sum p_{0,i} q_{k,i}} \tag{3.5.22}$$

a pro extenzitní ukazatel:

$$I_q = \frac{\sum q_{1,i} p_{k,i}}{\sum q_{0,i} p_{k,i}}. \tag{3.5.23}$$

Problémem u tohoto indexu může být skutečnost, z jakého období váhy uvažovat. Nespornou výhodou Loweho indexu je však skutečnost, že jako jediný z indexů 3. generace je řetězitelný. To znamená možnost výpočtu indexu srovnávající situaci *s* a situaci 0 na základě řetězení (násobení) indexů dvou a více po sobě následujících období, tj. srovnání období 1 a 0 nebo období 2 a 1, …, období *s* a *s*-1.

Do 3. generace souhrnných indexů patří i Montgomeryho index, na jehož základě byla odvozena tzv. logaritmická metoda rozkladu. Obecně se dá říci, že z několika zásadních důvodů třetí generace souhrnných indexů nenašla výraznější odezvu v praxi. Jedná se zvláště o obtížnou interpretovatelnost výsledků (Fisher), volbu vah v indexu (Lowe) či výpočetní náročnost (Montgomeryho index).

3.5.4 Cvičení

Řešené příklady

Příklad 1

O vývoji cen a struktuře vybraných druhů zboží v supermarketu za první a druhé čtvrtletí roku 2019 máme následující údaje:

Výrobek	Zboží	Měrná jednotka	Objem prodeje v měrných jednotkách		Cena (Kč/MJ)	
			IQ/2012	IIQ/2012	IQ/2012	IIQ/2012
A	Borůvková zmrzlina	1 l	250	280	27	30
B	Jahodová marmeláda	1 ks (350 g)	1 400	1 320	32	35
C	Malinová limonáda	1 l	5 200	6 900	27	20

Zdroj: vlastní

Posuďte:

a) změny prodaného množství jednotlivých výrobků,

b) změny cen jednotlivých výrobků,

c) změnu tržeb za tyto tři druhy zboží celkem,

d) změnu úrovně cen vybraných druhů zboží pomocí všech vhodných indexů a

e) změnu prodaného množství vybraných druhů zboží pomocí všech vhodných indexů.

Řešení

Výrobek	q_0	q_1	p_0	p_1	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1	p_1q_0	q_1/q_0	p_1/p_0
A	250	280	27	30	6 750	8 400	7 560	7 500	1,120	1,111
B	1 400	1 320	32	35	44 800	46 200	42 240	49 000	0,943	1,094
C	5 200	6 900	27	20	140 400	138 000	186 300	104 000	1,327	0,741
∑	x	x	x	x	191 950	192 600	236 100	160 250	x	x

a) individuální jednoduché indexy množství

Výrobek A:

Index: $\frac{q_1}{q_0} = \frac{280}{250} = 1{,}12$ Absolutně: $q_1 - q_0 = 280 - 250 = 30$ litrů

Prodané množství borůvkové zmrzliny se ve druhém čtvrtletí zvýšilo oproti prvnímu čtvrtletí o 30 litrů, tj. o 12 %.

Výrobek B:

Index: $\frac{q_1}{q_0} = \frac{1320}{1400} = 0{,}943$ Absolutně: $q_1 - q_0 = 1320 - 1400 = -80$ ks

Prodané množství jahodové marmelády ve druhém čtvrtletí pokleslo oproti prvnímu čtvrtletí o 80 ks, tj. o 5,7 %.

Výrobek C:

Prodané množství malinové limonády se ve druhém čtvrtletí zvýšilo oproti prvnímu čtvrtletí o 1700 litrů, tj. o 32,7 %.

b) individuální jednoduché cenové indexy

Výrobek A:

Index: $I_p = \frac{p_1}{p_0} = \frac{30}{27} = 1{,}111$ Absolutně: $p_1 - p_0 = 30 - 27 = 3$ Kč

Cena borůvkové zmrzliny vzrostla ve sledovaném období o 3 Kč za jeden litr, tj. o 11,1 %.

Výrobek B:

Index: $I_p = \frac{p_1}{p_0} = \frac{35}{32} = 1{,}094$ Absolutně: $p_1 - p_0 = 35 - 32 = 3$ Kč

Cena jahodové marmelády vzrostla ve sledovaném období o 3 Kč za jeden kus, tj. o 9,4 %.

Výrobek C:

Index: $I_p = \frac{p_1}{p_0} = \frac{20}{27} = 0{,}741$ Absolutně: $p_1 - p_0 = 20 - 27 = 7$ Kč

Cena malinové limonády poklesla ve sledovaném období o 7 Kč za litr, tj. o 25,9 %.

c) individuální složený index tržeb

$$I_Q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{192600}{191950} = 1{,}003$$

Δ = 192 600 – 191 950 = 650 Kč

Ve sledovaném období došlo ke zvýšení tržeb o 650 Kč, tj. o 0,3 %.

d) souhrnné cenové indexy

Laspeyresův cenový index

$$I_P^L = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{160250}{191950} = 0{,}8349$$

$\Delta_P^L = \sum p_1 q_0 - \sum p_0 q_0 = 160250 - 191950 = -31700$

Paascheho cenový index

$I_P^P = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{192600}{236100} = 0{,}8158$

$\Delta_P^P = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 192600 - 236100 = -43500$

Fisherův cenový index

$$I_P^F = \sqrt{I_P^L \cdot I_P^P} = \sqrt{\frac{p_1 q_0}{p_0 q_0} \cdot \frac{p_1 q_1}{p_0 q_1}} = \sqrt{0{,}8379 \cdot 0{,}8158} = 0{,}8253$$

Pokud by došlo ve sledovaném období pouze ke změně cen, vedlo by to ke snížení tržeb na 83,5 % původní hodnoty tržeb, tj. o 31 700 Kč, pokud by bylo uvažováno množství ze základního období, respektive ke snížení tržeb o 18,4 % (43 500 Kč), pokud by bylo uvažováno množství z období běžného. V průměru by došlo ve sledovaném období k poklesu tržeb na 82,6 % hodnoty původních tržeb.

e) souhrnné objemové indexy

Laspeyresův objemový index:

$$I_q^L = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{236100}{191950} = 1{,}230$$

$$\Delta_q^L = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 236100 - 191950 = 44150$$

Paascheho objemový index:

$$I_q^P = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0} = \frac{192600}{160500} = 1{,}200$$

$$\Delta_q^P = \sum p_1 q_1 - \sum p_1 q_0 = 192600 - 160500 = 32100$$

Fisherův objemový index:

$$I_q^F = \sqrt{I_q^L \cdot I_q^P} = \sqrt{\frac{p_0 q_1}{p_0 q_0} \cdot \frac{p_1 q_1}{p_1 q_0}} = \sqrt{1{,}230 \cdot 1{,}2} = 1{,}214\,.$$

Pokud by došlo ve sledovaném období pouze ke změně prodaného množství, vedlo by to ke zvýšení tržeb o 20 %, tj. růst o 32 100 Kč, pokud bychom uvažovali ceny z období běžného. Pokud bychom uvažovali ceny z období základního, došlo by ke zvýšení tržeb o 23 %, tj. růst o 44 150 Kč. V průměru by došlo ve sledovaném období k nárůstu o 21,4 %.

Neřešené příklady

Příklad 1

O vývoji cen a struktuře prodeje vybraných druhů zboží v jedné zpravodajské jednotce máme k dispozici údaje uvedené v následující tabulce:

Zboží	Měrová jednotka	Objem prodeje (v měrných jednotkách)		Cena (Kč/měrnou jednotku)	
		Květen 2019	Červen 2019	Květen 2019	Červen 2019
Ovocná šťáva	1 l	64	80	28	30
Masová konzerva	500 g	140	180	46	43
Těstoviny	500 g	88	70	22	25

Zdroj: vlastní

Posuďte a vysvětlete:

a) změnu tržeb za tyto druhy zboží,
b) jaký vliv na změnu celkových tržeb měla změna cen vybraných druhů zboží pomocí všech vhodných indexů,
c) jaký vliv na změnu celkových tržeb měla změna prodaného množství vybraných druhů zboží pomocí všech vhodných indexů.

Příklad 2

Firma Betax nakupuje akcie ostatních firem a dále s nimi obchoduje. O vývoji nákupních cen akcií a hodnoty jednotlivých akcií máme za měsíce květen a červen roku 2019 tyto údaje:

Vlastněné akcie	Nákupní cena (Kč/ks)		Hodnota akcií (tis. Kč)	
	Květen	Červen	Květen	Červen
Firma A	8,5	8,0	2 720	2 880
Firma B	23,0	20,5	9 430	8 610
Firma C	25,5	30,5	6 375	8 235

Zdroj: vlastní

Vyjádřete:

a) změnu celkové hodnoty portfolia,
b) změnu cen a změnu prodaného množství jednotlivých akcií,

c) jaký vliv na změnu celkového portfolia měla změna cen jednotlivých akcií,

d) jaký vliv na změnu celkového portfolia měla změna vlastněného množství akcií.

Výsledky

Příklad 1

Druh zboží	q_0	q_1	p_0	p_1	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1	p_1q_0
Ovocná šťáva	64	80	28	30	1 792	2 400	2 240	1 920
Masová konzerva	140	180	46	43	6 440	7 740	8 280	6 020
Těstoviny	88	70	22	25	1 936	1 750	1 540	2 200
Σ	x	x	x	x	10 168	11 890	12 060	10 140

a) $I_Q = 1{,}169$ $\Delta_Q = 1\ 722\ Kč$

b) $I_p^L = 0{,}997\ 2$ $I_p^P = 0{,}985\ 9$ $I_p^F = 0{,}991\ 5$

c) $I_q^L = 1{,}186$ $I_q^P = 1{,}172$ $I_q^F = 1{,}179$

Příklad 2

Vlastněné akcie	q_0	q_1	p_0	p_1	q_0p_0	q_1p_1	q_0p_1	q_1p_0
Firma A	320	360	8,5	8	2 720	2 880	2 560	3 060
Firma B	410	420	23	20,5	9 430	8 610	8 405	9 660
Firma C	250	270	25,5	30,5	6 375	8 235	7 625	6 885
∑	x	x	x	x	18 525	19 725	18 590	19 605

a) $I_Q = 1{,}0648$ $\Delta_Q = 1200\ \text{tis. Kč}$

b) jednoduché individuální indexy

Vlastněné akcie	$I_p = p_1/p_0$	$I_q = q_1/q_0$
Firma A	0,941	1,125
Firma B	0,891	1,024
Firma C	1,196	1,080

c) $I_p^L = 1{,}004$ $I_p^P = 1{,}006$ $I_p^F = 1{,}005$

$\Delta_p^L = 65$ $\Delta_p^P = 120$

d) $I_q^L = 1{,}058$ $I_q^P = 1{,}061$ $I_q^F = 1{,}059$

$\Delta_q^L = 65$ $\Delta_q^P = 1080$

3.6 Bortkiewiczův rozklad

V situaci, kdy víme, že indexy Paascheho a Laspeyrese jsou rovnocenné z hlediska kvality výsledků, které poskytují, je přirozené, že si klademe otázku, co je příčinou rozdílných hodnot těchto souhrnných indexů. Rozdílnost hodnot Paascheho a Laspeyresova indexu lze analyzovat a vysvětlit pomocí tzv. **Bortkiewiczova rozkladu**.

Bortkiewiczův rozklad **hledá příčinu rozdílu mezi hodnotou dvou průměrů ze stejných hodnot počítaných při různých vahách**. Bortkiewiczův rozklad je obecným statistickým nástrojem, zkoumání rozdílnosti indexů je jen jednou z jeho možných aplikací.

Z Bortkiewiczova rozkladu vyplývá, že rozdíl může být způsoben v důsledku

- variability individuálních cenových indexů,
- variability individuálních objemových indexů a
- korelace mezi objemovými a cenovými indexy.

Obecně můžeme vztah vyjádřit následovně. Rozdílnost průměru hodnot znaku *x* při použití vah *M* a při použití vah *N* je důsledkem variability hodnot znaku *x*, variability podílu vah *M*/*N* a intenzity závislosti průměrovaných hodnot znaku *x* a podílu vah *M*/*N*. Pro podíl dvou průměrů počítaných při použití různých vah pak platí:

$$\frac{\bar{x}_M}{\bar{x}_N} = 1 + V_x \cdot V_{M/N} \cdot r_{x,M/N}\,, \qquad (3.6.1)$$

kde $\bar{x}_M$, resp. $\bar{x}_N$ je průměr hodnot znaku *x* počítaný při použití vah *M*, resp. *N*,

V_x , resp. $V_{M/N}$ je variační koeficient znaku *x*, resp. podílu vah *M*/*N* (blíže viz kapitola 3.6.1),

$r_{x,M/N}$ je korelační koeficient vyjadřující lineární závislost znaku *x* a podílu *M*/*N* (viz kap. 3.6.1).

Tento obecný vztah lze aplikovat i na podíl dvou souhrnných indexů v průměrovém tvaru, tj. na podíl Paascheho cenového indexu (vyjádřeného jako vážený aritmetický průměr jednoduchých cenových indexů a s hypotetickými vahami) a Laspeyresova cenového indexu (s vahami za situace v základním období). Vyjádříme-li Paascheho cenový index ve tvaru váženého aritmetického průměru při použití hypotetických vah $p_{0,i} \cdot q_{1,i}$ ve tvaru:

$$I_p^P = \frac{\sum I_p \cdot p_0 q_1}{\sum p_0 q_1} \qquad (3.6.2)$$

a srovnáme jej s Laspeyresovým cenovým indexem (vzorec 3.5.9), je zřejmé, že porovnáváme dva průměry téže veličiny (zde jednoduché cenové indexy) počítané při různých vahách. Jestliže v případě Paascheho indexu máme k dispozici váhy M (p_0q_1) a v případě Laspeyresova indexu váhy N (p_0q_1), pak podíl vah M/N je roven I_q. Borkewiczův rozklad srovnávající Paascheho a Laspeyresův cenový index pak bude mít následující podobu:

$$\frac{I_p^P}{I_p^L} = 1 + V_{I_p} \cdot V_{I_q} \cdot r_{I_p, I_q}. \tag{3.6.3}$$

Jednotlivé členy sčítance za konstantou vyjadřují postupně variabilitu individuálních cenových indexů, variabilitu individuálních objemových indexů a korelační koeficient mezi individuálními cenovými a individuálními objemovými indexy. S výpočtem variability a korelačního koeficientu se seznámíme v základních kurzech statistiky.

Z rozkladu plyne, že rovnost obou indexů, tedy

$$\frac{I_p^P}{I_p^L} = 1,$$

nastává jen tehdy, když jsou individuální jednoduché indexy cen a množství vzájemně lineárně nezávislé, což je v praxi málo obvyklé ($r_{I_p, I_q} = 0$), resp. když individuální jednoduché indexy cen nebo množství budou všechny stejně velké (a tedy variační koeficient bude nulový). Hodnota Paascheho indexu je větší než hodnota Laspeyresova cenového indexu

$$\frac{I_p^P}{I_p^L} > 1,$$

existuje-li přímá lineární závislost mezi jednoduchými cenovými a objemovými indexy ($r_{I_p * I_q} > 0$). Naopak hodnota Paascheho indexu je menší než hodnota Laspeyresova cenového indexu

$$\frac{I_p^P}{I_p^L} < 1,$$

existuje-li nepřímá lineární závislost mezi jednoduchými cenovými a objemovými indexy ($r_{I_p * I_q} < 0$). Vzhledem k tomu, že nepřímá závislost jednoduchých cenových a objemových indexů vyjadřuje vzájemné protisměrné působení vývoje cen a množství, setkáváme se v praxi ve většině případů právě s touto možností.

Velikost rozdílnosti obou indexů vyjádřená jejich podílem bude tedy záviset na intenzitě (přímé či nepřímé) závislosti jednoduchých cenových a objemových indexů a na variabilitě jednoduchých cenových, resp. objemových indexů. Obecně platí, čím větší je intenzita (přímé či nepřímé) závislosti jednoduchých cenových a objemových indexů a čím větší je jejich relativní variabilita, tím větší je rozdíl mezi Paascheho a Laspeyresovým cenovým indexem.

3.6.1 Charakteristiky související s Bortkiewiczovým rozkladem

V rámci výpočtu Bortkiewiczova rozkladu jsme se setkali s několika charakteristikami, které blíže představíme v této kapitole. Ukázku výpočtu těchto elementárních statistických charakteristik jsme již přizpůsobili jejich využití při porovnání jednoduchých individuálních objemových a cenových indexů dle rozkladu (3.6.3).

U všech výpočtů budou uvedeny tzv. relativní váhy, které lze vyjádřit jako podíl tržeb jednotlivých výrobků ($p_0 q_{0,i}$) na celkové sumě tržeb v základním období ($\sum p_0 q_0$):

$$w_{0,i} = \frac{p_0 q_{0,i}}{\sum p_0 q_0}. \qquad (3.6.4)$$

a) Variační koeficient V_{I_p}, resp. V_{I_q}

Variační koeficient je jednou z měr relativní variability. Měří variabilitu nestejnorodé veličiny v různých měrných jednotkách. Obecně se vypočítá jako podíl směrodatné odchylky s_x a průměru z hodnot $\bar{x}$ ve tvaru:

$$V_x = \frac{s_x}{\bar{x}} \qquad (3.6.5)$$

Pro Bortkiewiczův rozklad by byly variační koeficienty ve tvaru:

$$V_{I_p} = \frac{s_{I_p}}{\bar{I}_p} \qquad (3.6.6)$$

a

$$V_{I_q} = \frac{s_{I_q}}{\bar{I}_q}, \qquad (3.6.7)$$

kde $\bar{I}_P$ a $\bar{I}_q$ jsou aritmetické průměry individuálních jednoduchých cenových a objemových indexů, vypočítané pomocí relativních vah:

$$\bar{I}_p = \sum_{i=1}^{k} I_{p,i} w_{0,i} \qquad (3.6.8)$$

a

$$\bar{I}_q = \sum_{i=1}^{k} I_{q,i} w_{0,i} \ , \tag{3.6.9}$$

kde s_{I_p} a s_{I_q} jsou směrodatné odchylky individuálních jednoduchých cenových a objemových indexů. Směrodatná odchylka s_x je mírou absolutní variability vypočtenou pomocí tzv. kvadratického průměru. Její výpočet provádíme pomocí druhé odmocniny rozptylu s_x^2, který představuje průměrnou čtvercovou odchylku od průměru. Rozptyl individuálních cenových indexů můžeme psát jako

$$s_{I_p}^2 = \bar{I}_p^2 - (\bar{I}_p)^2 , \tag{3.6.10}$$

Obdobně pro individuální objemové indexy platí

$$s_{I_q}^2 = \bar{I}_q^2 - (\bar{I}_q)^2 \tag{3.6.11}$$

Směrodatnou odchylku pak odvodíme z rozptylu pomocí výše popsaného postupu

$$s_{I_p} = \sqrt{s_{I_p}^2} \ , \tag{3.6.12}$$

resp.

$$s_{I_q} = \sqrt{s_{I_q}^2} \tag{3.6.13}$$

b) korelační koeficient r_{I_p, I_q}

Korelační koeficient r_{xy} měří míru lineární závislosti sledovaných veličin *x* a *y*. Nabývá hodnot z intervalu $\langle -1;1 \rangle$. Jestliže je koeficient korelace roven +1, existuje mezi proměnnými funkční přímá lineární závislost. Obdobně koeficient korelace (-1) znamená, že mezi proměnnými je nepřímá funkční lineární závislost. Konečně $r_{xy} = 0$ značí lineární nezávislost (nekorelovanost) proměnných. Čím více se tedy blíží koeficient korelace v absolutní hodnotě jedné, tím považujeme danou závislost za silnější; čím více se blíží nule, tím ji považujeme za volnější. Je však důležité si uvědomit, že koeficient blížící se nule nemusí nutně znamenat slabou závislost, korelované proměnné mohou být silně závislé, ale třeba nelineárně. Obecně má korelační koeficient následující tvar:

$$r_{x,y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \ , \tag{3.6.14}$$

kde s_x a s_y jsou směrodatné odchylky sledovaných veličin, a s_{xy} je tzv. kovariance. Po dosazení našich sledovaných veličin, tj. individuálních jednoduchých cenových a objemových indexů má korelační koeficient tvar

$$r_{I_p,I_q} = \frac{s_{I_p I_q}}{s_{I_p} s_{I_q}} . \tag{3.6.15}$$

c) kovariance S_{xy}

Kovariance proměnných x a y charakterizuje vzájemnou závislost obou proměnných, neumí však vyjádřit na rozdíl od korelačního koeficientu těsnost závislosti, ale pouze směr. Kovariance má obecně tvar

$$s_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} , \tag{3.6.16}$$

kde $\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou průměry veličin x a y, a $\overline{xy}$ je průměr ze součinu sledovaných veličin. Pro naše veličiny – individuální jednoduché cenové a objemové indexy – má kovariance následující tvar

$$s_{I_p I_q} = \overline{I_p I_q} - \overline{I_p} \cdot \overline{I_q} . \tag{3.6.17}$$

3.6.2 Cvičení

Řešené příklady

Příklad 1

Máme údaje o prodeji a cenách tří druhů zboží v měsících září a říjnu předešlého roku. Vyjádřete:

a) změnu tržeb v daném období,
b) jaký vliv na změnu tržeb měla změna cen,
c) rozdíly v hodnotě cenových indexů Laspeyresova a Paascheho pomocí Bortkiewiczova rozkladu.

Zboží	Prodej		Cena	
	září	říjen	září	říjen
A	100	125	5	4
B	75	60	10	12
C	50	40	25	20

Zdroj: vlastní

Řešení:

Výpočty si uspořádáme do tabulky.

Zboží	q_0	q_1	p_0	p_1	$p_0\,q_0$	p_1q_1	$p_0\,q_1$	p_1q_0
A	100	125	5	4	500	500	625	400
B	75	60	10	12	750	720	600	900
C	50	40	25	20	1 250	800	1 000	1 000
Σ	x	x	x	x	2 500	2 020	2 225	2 300

a)

$$I_Q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{2020}{2500} = 0{,}808$$

Δ = 2020 – 2500 = –480 Kč

Tržby v říjnu oproti září klesly o 480 Kč, tj. o 19,2 %.

b) souhrnné indexy úrovně

Laspeyresův cenový index a odpovídající absolutní rozdíl:

$$I_p^L = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{2300}{2500} = 0{,}92$$
$$\Delta_p^L = \sum p_1 q_0 - \sum p_0 q_0 = 2300 - 2500 = -200$$

Paascheho cenový index a odpovídající absolutní rozdíl:

$$I_p^P = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{2020}{2225} = 0{,}9087$$
$$\Delta_p^P = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 2020 - 2225 = -205$$

Fisherův cenový index

$$I_p^P = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{2020}{2225} = 0{,}9087$$
$$I_p^F = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P} = \sqrt{\frac{p_1 q_0}{p_0 q_0} \cdot \frac{p_1 q_1}{p_0 q_1}} = \sqrt{0{,}92 \cdot 0{,}9087} = 0{,}9143$$

Pouze vlivem změny cen by tržby v říjnu oproti září klesly o 8 %, tj. pokles o 200 Kč, v případě uvažování vah ze základního období. V případě uvažování struktury prodeje v běžném období by tržby vlivem cen klesly na 90,87 % hodnoty původních tržeb, tj. pokles o 9,13 %, absolutně o 205 Kč. V průměru by tržby vlivem cen klesly o 8,57 %.

c)

Zboží	p_0q_0	w_{0i}	I_p	I_q
A	500	0,2	0,8	1,25
B	750	0,3	1,2	0,8
C	1 250	0,5	0,8	0,8
Σ	2 500	1,0	x	x

Zboží	I_pw_{0i}	I_qw_{0i}	$I_p^2w_{0i}$	$I_q^2w_{0i}$	$I_pI_qw_{0i}$
A	0,16	0,25	0,128	0,312 5	0,200
B	0,36	0,24	0,432	0,192 0	0,288
C	0,40	0,40	0,320	0,320 0	0,320
Σ	0,92	0,89	0,880	0,824 5	0,808

$\bar{I}_p = \sum_{i=1}^{k} I_{p,i} w_{0,i} = 0,92$ $\quad \bar{I}_q = \sum_{i=1}^{k} I_{q,i} w_{0,i} = 0,89$ $\quad \overline{I_p I_q} = \sum_{i=1}^{k} I_{q,i} I_{p,i} w_{0,i} = 0,808$

$\bar{I}_p^2 = 0,88$ $\quad \bar{I}_q^2 = 0,8245$

$s_{I_p}^2 = \bar{I}_p^2 - (\bar{I}_p)^2 = 0,88 – 0,92^2 = 0,0336$ $\quad s_{I_p} = 0,1833$

$s_{I_q}^2 = \bar{I}_q^2 - (\bar{I}_q)^2 = 0,8245 – 0,89^2 = 0,0324$ $\quad s_{I_q} = 0,1800$

$s_{I_pI_q} = \overline{I_pI_q} - \overline{I_p} \cdot \overline{I_q} = 0,808 – 0,92 \cdot 0,89 = –0,0108$

$$V_{I_p} = \frac{s_{I_p}}{\bar{I}_p} = \frac{0,1833}{0,92} = 0,1992$$

$$V_{I_q} = \frac{s_{I_q}}{\bar{I}_q} = \frac{0,180}{0,89} = 0,2022$$

Koeficient korelace $\quad r_{I_p,I_q} = \frac{s_{I_pI_q}}{s_{I_p} s_{I_q}} = \frac{-0,0108}{0,1833.0,180} = –0,3273$

$$\frac{I^{(P)}}{I^{(L)}} = 1 + V_{I_p} \cdot V_{I_q} \cdot r_{I_p,I_q} = 1 + 0,1992 \cdot 0,2022\ (-0,3273) = 0,9868$$

Důvodem malého rozdílu mezi Laspeyresovým a Paascheho indexem je malá variabilita jak u cenových, tak u objemových indexů a rovněž i slabá (nepřímá lineární) závislost objemových a cenových indexů.

Neřešené příklady

Příklad 1

Na základě údajů o tržbách a změně cen tří druhů venkovní dlažby vyjádřete:

a) celkovou změnu tržeb,
b) jak se na celkové změně tržeb podílela změna cen a změna prodaného množství jednotlivých druhů venkovní dlažby,
c) pomocí Bortkiewiczova rozkladu vysvětlete příčinu rozdílu mezi Laspeyresovým a Paascheho cenovým indexem.

Dlažba	Tržby (Kč)		Změna cen v květnu oproti dubnu
	Duben	Květen	
Alto	256 000	248 200	1,15
Bruno	320 000	364 800	0,98
Maron	156 000	162 000	1,42

Zdroj: vlastní

Příklad 2

O vývoji cen a tržbách za tři druhy výrobků v malé pekárně máme za první dvě čtvrtletí roku 2019 následující údaje:

Výrobek	Hmotnost	Ceny (Kč)		Tržby (Kč)	
		1. čtvrtletí	2. čtvrtletí	1. čtvrtletí	2. čtvrtletí
Koláček	250 g	19	22	7 980	8 360
Vánočka	350 g	26	18	3 328	4 752
Dalamánek	125 g	6	12	3 360	2 880

Zdroj: vlastní

Vyjádřete:

a) změnu celkových tržeb,
b) jaký vliv na změnu celkových tržeb měla změna cen jednotlivých výrobků,
c) jaký vliv na změnu celkových tržeb měla změna prodaného množství jednotlivých výrobků,
d) jak se změnilo prodané množství jednotlivých výrobků,
e) pomocí Bortkiewiczova rozkladu vysvětlete příčinu rozdílu mezi Laspeyresovým a Paascheho cenovým indexem.

Výsledky

Příklad 1

Dlažba	q_0p_0	q_1p_1	q_0p_1	q_1p_0	p_1/p_0	q_1/q_0	$w_{o,i}$
Alto	256 000	248 200	294 400	215 826,1	1,15	0,843	0,350
Bruno	320 000	364 800	313 600	372 244,9	0,98	1,163	0,437
Maron	156 000	162 000	221 520	114 084,5	1,42	0,731	0,213
Σ	732 000	775 000	829 520	702 155,5	3,55	x	x

Dlažba	I_pw_{0i}	I_qw_{0i}	$I_p^2w_{0i}$	$I_q^2w_{0i}$	$I_pI_qw_{0i}$
Alto	0,402	0,295	0,463	0,249	0,340
Bruno	0,428	0,509	0,420	0,592	0,498
Maron	0,303	0,156	0,430	0,114	0,221
Σ	1,133	0,960	1,313	0,955	1,059

a)

$I_Q = 1{,}059$

b)

$I_p^L = 1{,}133$ $I_p^P = 1{,}104$ $I_p^F = 1{,}118$

$\mathrm{I_q^P} = 0{,}934$ $\mathrm{I_q^L} = 0{,}96$ $\mathrm{I_q^F} = 0{,}947$

c)

$$\frac{I^{(P)}}{I^{(L)}} = 1 + V_{I_p} \cdot V_{I_q} \cdot r_{I_p,I_q} = 1 + 0{,}150 \cdot 0{,}189 \cdot (-0{,}927) = 0{,}974$$

Na rozdílu mezi indexy se podílí především silná nepřímá závislost (měřené korelačním koeficientem) mezi cenovými a objemovými individuálními indexy.

Příklad 2

Výrobek	p_0	p_1	p_0q_0	p_1q_1	q_0	q_1
Koláček	19	22	7 980	8 360	420	380
Vánočka	26	18	3 328	4 752	128	264
Dalamánek	6	12	3 360	2 880	560	240
∑	x	x	14 668	15 992	x	x

a)

$I_Q = 1{,}09$ Δ_Q = 1 324 Kč

b)

$I_p^L = 1{,}245$ $I_p^P = 1{,}030$ $I_p^F = 1{,}132$

c)

$I_q^L = 1{,}058$ $I_q^P = 0{,}875$ $I_q^F = 0{,}962$

d)

$I_{q,A} = 0{,}904$ $I_{q,B} = 2{,}060$ $I_{q,C} = 0{,}420$

e)

$$\frac{I^{(P)}}{I^{(L)}} = 1 + V_{I_p} \cdot V_{I_q} \cdot r_{I_p,I_q} = 1 + 0{,}363 \cdot 0{,}545 \cdot (-0{,}873) = 0{,}827$$

4 Indexy a absolutní rozdíly jako nástroj analýzy

Indexy a absolutní rozdíly neslouží pouze jako nástroj srovnání, tedy zjištění o kolik, resp. kolikrát je hodnota určitého ukazatele rozdílná oproti jiné hodnotě. Mohou sloužit i jako nástroj analýzy pro určení příčiny této samotné rozdílnosti. Abychom určili příčinu rozdílnosti hodnot, vyjdeme z rozdělení celkového indexu na dílčí indexy, které budou vyjadřovat vliv každého z uvažovaných činitelů na celkovou změnu.

Budeme zde tedy uvažovat tzv. **syntetický ukazatel**, tj. index sledovaného ukazatele (resp. absolutní přírůstek ukazatele) a **analytické indexy** (resp. absolutní přírůstky), které budou vyjadřovat vliv jednotlivých činitelů na změnu syntetického ukazatele. Analytické indexy (resp. analytické absolutní přírůstky) nám tak musí beze zbytku vysvětlovat změnu vyjádřenou syntetickým ukazatelem, resp. absolutním přírůstkem.

Pokud analytické indexy (absolutní přírůstky) mají vysvětlit příčinu změny vyjádřené syntetickým ukazatelem, musí platit:

$$Ix = \prod_{i=1}^{m} Ix_{ai}$$

a

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{m} \Delta x_{ai} \ ,$$

kde

x – syntetický ukazatel,

a_i – analytický ukazatel,

Ix – index syntetického ukazatele,

Δx – absolutní přírůstek syntetického ukazatele,

$Ix_{ai}, \Delta x_{ai}$ – analytický index/analytický absolutní přírůstek, vyjadřující vliv změny ukazatele a_i na změnu syntetického ukazatele x pro i = 1, 2, …, m.

Index syntetického ukazatele musíme rozložit vyčerpávajícím způsobem na součin analytických indexů a syntetický absolutní rozdíl na součet analytických absolutních přírůstků tak, aby nám analytické indexy, resp. analytické absolutní přírůstky, beze zbytku vysvětlily změny vyjádřenou syntetickým ukazatelem – indexem, resp. rozdílem.

Kromě tohoto musíme uvažovat i další předpoklad, který vychází z podstaty srovnávacích měr rozdílnosti. Pokud pracujeme s modelem, v němž existuje výlučně jen součtová vazba, tzv. ryze aditivní model, je analytický absolutní přírůstek roven přírůstku analytického ukazatele:

$$\Delta x_{ai} = \Delta a_i \quad \text{pro } i = 1,2, \ldots, m.$$

Pokud pracujeme s modelem, ve kterém existuje výlučně jen součinová vazba, tzv. ryze multiplikativní model, je analytický index roven indexu analytického ukazatele:

$$Ix_{ai} = Ia_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Na těchto požadavcích jsou založeny dvě základní metody rozkladu absolutního přírůstku a indexu – metoda postupných změn a logaritmická metoda rozkladu. V rámci tohoto se seznámíme s nejčastěji používanou metodou, a to s metodou postupných změn.

4.1 Metoda postupných změn

Metoda postupných změn vychází z předpokladu postupných a izolovaných změn jednotlivých činitelů. I když je tento předpoklad v praxi obtížně realizovatelný, díky výpočetní jednoduchosti se tato metoda zařadila mezi nejvíce používané metody rozkladu.

Metodu postupných změn budeme aplikovat na index proměnlivého složení, tj. složený individuální index intenzitního ukazatele

$$I_{\bar{p}} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} = \frac{\dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\dfrac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}} = \frac{\dfrac{\sum Q_1}{\sum q_1}}{\dfrac{\sum Q_0}{\sum q_0}}. \tag{4.1.1}$$

Absolutní přírůstek odpovídající indexu proměnlivého složení má pak tvar:

$$\Delta_{\bar{p}} = \bar{p}_1 - \bar{p}_0 = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} - \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{\sum Q_1}{\sum q_1} - \frac{\sum Q_0}{\sum q_0}. \tag{4.1.2}$$

Index proměnlivého složení je podílem dvou hodnot průměrů, které vycházejí z hodnot intenzitního a extenzitního ukazatele. Samotná hodnota indexu proměnlivého složení se tak bude měnit nejen vlivem změn dílčích hodnot intenzitního ukazatele, ale i vlivem změn dílčích hodnot extenzitního ukazatele (vah).

V případě, kdy chceme zjistit pouze vliv samotných změn dílčích hodnot intenzitního ukazatele p na změnu vyjádřenou indexem proměnlivého složení, hodnota extenzitního ukazatele q

(tj. struktura vah) bude stálá. Tento index se nazývá **index stálého složení**. Vzhledem k tomu, že strukturu vah (hodnoty extenzitního ukazatele) můžeme fixovat k základnímu, či běžnému období, získáme dva významově ekvivalentní indexy stálého složení s tím, že je zapotřebí v závěru interpretovat, k jakému období se struktura vah vztahuje.

V úvahu tak přicházejí tyto dvě možnosti:

Struktura vah (hodnoty extenzitního ukazatele) odpovídá **základnímu období:**

$$I_{SS}^{q_0} = \frac{\dfrac{\sum p_1 q_0}{\sum q_0}}{\dfrac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}. \tag{4.1.3}$$

Struktura vah (hodnoty extenzitního ukazatele) odpovídá **běžnému období:**

$$I_{SS}^{q_1} = \frac{\dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\dfrac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}. \tag{4.1.4}$$

Pokud však kromě tohoto chceme samostatně určit vliv změn ve struktuře extenzitního ukazatele q na celkovou změnu vyjádřenou indexem proměnlivého složení, konstruujeme tzv. **index struktury**. V tomto případě se mění jen struktura vah a dílčí hodnoty intenzitního ukazatele p zůstávají stejné. Opět zde můžeme rozlišovat dva významově ekvivalentní indexy podle toho, zda hodnotu intenzitního ukazatele budeme fixovat k základnímu, či běžnému období.

Hodnota intenzitního ukazatele odpovídá **základnímu období:**

$$I_{STR}^{p_0} = \frac{\dfrac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1}}{\dfrac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}. \tag{4.1.5}$$

Hodnota intenzitního ukazatele odpovídá **běžnému období:**

$$I_{STR}^{p_1} = \frac{\dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\dfrac{\sum p_1 q_0}{\sum q_0}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0}. \tag{4.1.6}$$

Pro vyjádření celkové změny pomocí dílčích změn pak musí platit, že součinem indexu stálého složení a indexu struktury získáme index proměnlivého složení. Vzhledem k tomu, že zde máme dva významově ekvivalentní indexy stálého složení a struktury, máme zde dvě možnosti výpočtu:

$$I_{\bar{p}} = I_{SS}^{q_0} \cdot I_{STR}^{p_1} = \frac{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum q_0}}{\frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}} \cdot \frac{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum q_0}} = \frac{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}}. \tag{4.1.7}$$

nebo

$$I_{\bar{p}} = I_{STR}^{p_0} \cdot I_{SS}^{q_1} = \frac{\frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}} \cdot \frac{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1}} = \frac{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}}. \tag{4.1.8}$$

Rozklady indexu proměnlivého složení na dva analytické indexy těmito dvěma způsoby jsou významově rovnocenné a neexistují zde objektivní důvody pro preferenci jednoho z nich. Při interpretaci výsledků je však zapotřebí zdůraznit, k jakému období se dané hodnoty fixují.

4.1.1 Cvičení

Neřešené příklady

<u>Příklad 1</u>

Na základě údajů v tabulce určete vliv změny cen v jednotlivých prodejnách a vliv změny struktury prodeje na změnu průměrné ceny čokolády ČOKO v únoru oproti lednu 2019.

Prodejna	Cena		Počet prodaných ks	
	leden	únor	leden	únor
1	16	19	200	250
2	18	20	150	120

Zdroj: vlastní

Příklad 2

Železářská společnost a. s. má závody v Zásmukách a Kraslicích. V každém z nich zkoumá údaje o výrobku "Toník".

Závod	Cena (Kč/ks)		Tržba (v tis. Kč)	
	2018	2019	2018	2019
Zásmuky	18	22	5 004	5 632
Kraslice	21	25	4 494	6 400

Zdroj: vlastní

a) Určete *vliv změny cen* výrobku na změnu celkové průměrné ceny výrobku.

b) Určete *vliv změny počtu vyrobených výrobků* na změnu celkové průměrné ceny výrobku.

Výsledky

Příklad 1

$I_{\bar{p}} = 1{,}146$

$I_{SS}^{q_0} = 1{,}152 \quad I_{STR}^{p_1} = 0{,}995$

$I_{SS}^{q_1} = 1{,}161 \quad I_{STR}^{p_0} = 0{,}988$

Příklad 2

a) $I_{ss}^{q_0} = 1{,}207 \; nebo \; I_{ss}^{q_1} = 1{,}205$

b) $I_{STR}^{p0} = 1{,}01 \; nebo \; I_{STR}^{p1} = 1{,}008$

4.2 Logaritmická metoda rozkladu

Oproti metodě postupných změn, která je založena na předpokladu izolovaných a vzájemně nezávislých změn, vychází logaritmická metoda rozkladu z předpokladu, že ať vliv určitého analytického ukazatele na změnu syntetického ukazatele vyjádříme absolutně nebo relativně, musí být podíl této analytické míry rozdílnosti na celkové rozdílnosti vyjádřené syntetickým ukazatelem stejný. Další rozdíl spočívá v tom, že logaritmická metoda rozkladu je početně náročnější.

Výše uvedený předpoklad je tak dán vztahem:

$$\frac{\Delta x_{ai}}{\Delta x} = \frac{\ln Ix_{ai}}{\ln Ix} \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.4.1}$$

Pro určení analytického absolutního přírůstku úpravou tohoto vztahu získáme výpočetní tvar:

$$\Delta x_{ai} = \frac{\ln Ix_{ai}}{\ln Ix} \cdot \Delta x \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.4.2}$$

Pro určení analytického indexu pak jeho úpravou získáme výpočetní tvar:

$$Ix_{ai} = Ix^{\frac{\Delta x_{ai}}{\Delta x}} \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.4.3}$$

Výhoda logaritmické metody spočívá především v jednoznačnosti výsledku při rostoucím počtu činitelů (faktorů) a v možnosti použít ji tam, kde je použití metody postupných změn prakticky nemožné (např. při rostoucím počtu činitelů nemáme pro volbu určitého pořadí změn činitelů objektivní kritérium, při *n* činitelích můžeme pro každý z nich dostat 2^{n-1} různých výsledků).

5 Prostorové a vícekriteriální srovnávání

Cílem prostorového srovnání je zjistit postavení jednotlivých států, regionů aj. (prostorů) podle jednoho či více ukazatelů. S ohledem na to, že ne vždy se podaří beze zbytku splnit požadavky věcné a časové srovnatelnosti (mezi prostory), mají výsledky prostorových srovnání spíše povahu orientačních charakteristik než zcela přesných výpovědí.

Prostorové srovnání by se mělo týkat takového období, resp. okamžiku, které není v žádném ze srovnávaných prostorů ovlivněno mimořádnými výkyvy, neboť výsledek srovnání by nevyjadřoval typickou relaci pro uvažované prostory. Pokud se tomuto však nelze vyhnout, je nutné zohlednit danou skutečnost při interpretaci výsledků.

Kromě zajištění časové srovnatelnosti je zapotřebí zajistit i věcnou srovnatelnost. Pokud je ukazatel určitého jevu za různé prostory výsledkem společného statistického zjišťování, případně výsledkem činnosti téže statistické služby, můžeme předpokládat, že se zde uplatnilo shodné věcné vymezení. Rovněž je předpoklad splněn, pokud ukazatel odpovídá mezinárodně dohodnutému standardu.

S ohledem na cíl prostorového srovnání (charakteristika postavení jednotlivých regionů či států mezi ostatními) se v praxi dává přednost ukazatelům relativizovaným (na obyvatele, na jednotku plochy aj.), příp. ukazatelům podílovým (vztaženým k celku).

5.1 Srovnání pomocí peněžních ukazatelů

Přepočty peněžních ukazatelů téhož jevu ve dvou státech přicházejí v úvahu v situaci, kdy při mezinárodním srovnávání jsou ukazatele vyjádřeny v rozdílných měnových jednotkách a jejich bezprostřední srovnání tak pozbývá smyslu.

V praxi se dříve pro přepočet do společné měny používaly směnné kurzy a získali jsme tak tzv. **nominální ukazatele**. Tento postup se uplatňoval zejména ve statistikách vývozu a dovozu, kde se vedle ocenění tuzemskou měnou uvedlo i ocenění v měně partnerského státu. V dnešní době se uvádí zejména ocenění v dohodnuté společné měně EUR, příp. USD. Jelikož ale směnné kurzy vyplývají především z nabídky a poptávky po dané měně, nemohou současně vyjadřovat relace mezi cenovými hladinami dvojic zemí.

Z tohoto důvodu se tak pro statistická srovnání namísto směnných kurzů při přepočtech do společné měny používají parity kupní síly měn.

Parita kupní síly měny (purchasing power parity, dále „PPP“) představuje bezrozměrnou přepočtovou míru měny, která umožňuje převést kupní síly různých měn na společnou (jedinou) měnu. Přepočteme-li tak pomocí PPP hodnotu výrobků a služeb v měně země A měnu země A do kterékoliv jiné měny, dostaneme částku, za kterou lze koupit stejné množství výrobků a služeb na vnitrostátním trhu dané země jako v zemi A.

Úloha propočtu parity kupní síly určité měny k jiné měně je ze statistického hlediska ve své podstatě výpočtem cenového indexu, neboť zde srovnáváme dvě různé cenové hladiny pomocí souboru jejich nositelů – výrobků a služeb. Pokud bychom usilovali o propočet parit kupní síly měn dvou zemí, mohli bychom využít **Fisherův index**, tj. geometrický průměr Laspeyresova cenového a Paascheho cenového indexu (aplikovaný na dvě soustavy množství pocházejících ze zemí A a B)

$$\sqrt{\frac{\sum q_A p_A}{\sum q_A p_{\mathbf{B}}} \cdot \frac{\sum q_B p_A}{\sum q_B p_{\mathbf{B}}}}\,. \tag{5.1}$$

Rovněž existuje i tzv. **modifikace Fisherova indexu**, kdy předmětem geometrického průměrování nejsou pouze dva indexy, ale tolik indexů, kolik zemí se srovnávání účastní. Tuto modifikaci navrhli O. Eltétö, P. Köves a B. Szulc (jedná se o tzv. metodu EKS dle počátečních písmen jmen jejich autorů), viz OECD (1992).

5.1.1 Cvičení

Řešené příklady

Příklad 1

U země A a země B máme ke třem shodně věcně definovaným skupinám zboží Alfa, Beta a Gama ve shodném časově vymezeném období k dispozici údaje o množství zboží a ceně za jednotku. Určete, jak se liší cenové hladiny u země A a země B.

Skupina zboží	Země A		Země B	
	množství	cena	množství	cena
Alfa	35	40	30	15
Beta	30	50	50	10
Gama	35	45	20	25

Zdroj: vlastní

Řešení:

Skupina zboží	Země A		Země B		Pomocné výpočty			
	q_A	p_A	q_B	p_B	q_Ap_A	q_Ap_B	q_Bp_A	q_Bp_B
Alfa	35	40	30	15	1 400	525	1 200	450
Beta	30	50	50	10	1 500	300	2 500	500
Gama	35	45	20	25	1 575	875	900	500
$\sum$	x	x	x	x	4 475	1 700	4 600	1 450

$$\frac{A}{B} = \sqrt{\frac{\sum q_A p_A}{\sum q_A p_B} . \frac{\sum q_B p_A}{\sum q_B p_B}} = \sqrt{\frac{4\,475}{1\,700} . \frac{4\,600}{1\,450}} = 2{,}89$$

Cenová hladina země A je 2,89krát vyšší než cenová hladina země B, tj. v zemi A bychom stejný objem zboží koupili 2,89krát dráže než v zemi B.

Kromě vyjádření rozdílné cenové hladiny v určitých prostorech můžeme vyjádřit i opačnou situaci, tj. jaké množství služeb a zboží lze při dané cenové hladině koupit za určité množství peněz. Tuto relaci můžeme vyjádřit pomocí **Standardu kupní síly (dále „PPS“)**. Jedná se o propočet jednotek umělé společné měny, ve kterých se vylučují rozdíly v cenové úrovni mezi srovnávanými zeměmi. Tím je umožněno provádět prostorové srovnání objemových ukazatelů mezi zeměmi. Zjednodušeně řečeno tak získáme údaj o tom, kolik si toho můžeme koupit v jednotlivých zemích za konkrétní peněžní sumu.

5.2 Kompozitní indikátory

Prostorové srovnání regionů, zemí atd. je jednoduché, pokud jsme nalezli jeden vhodný ukazatel, který jsme navíc schopni jednoduše naplnit daty. Složitější situace nastává, pokud je jev, který zkoumáme, ovlivněn mnoha jinými jevy, nelze jej charakterizovat pouze pomocí jednoho ukazatele a potřebujeme více ukazatelů, které mohou být vyjádřeny i v různých měrných jednotkách. V takovém případě mluvíme o tzv. kompozitních indikátorech. Kompozitní indikátory jsou v mnoha případech asi jediným možným řešením srovnání různých území, zároveň s sebou ale nesou mnohá nebezpečí a jejich konstrukce vyžaduje velkou pečlivost. Tato nebezpečí jsou dána především subjektivitou, která kompozitní indikátory doprovází již od začátku procesu konstrukce (stanovení výčtu ukazatelů); výsledek je citlivý též na (subjektivní) určení způsobu transformace, stanovení váhového schématu, volbu metody agregace; a samozřejmě opatrná musí být i interpretace výsledků.

Nyní se zastavíme u těchto pojmů a krátce si představíme alespoň základní kroky tvorby kompozitního indikátoru.

Na samém začátku si musíme přesně vymezit, o čem má ukazatel vypovídat a následně vybrat ukazatele, které v něm budou zahrnuty. Vzhledem k tomu, že jsme řekli, že ukazatele mohou být v různých měrných jednotkách, mohou též být zatíženy rozlohou či počtem obyvatel atd., je proto nutné data nejdříve transformovat. Dále se musíme rozhodnout, jaké váhy přiřadíme jednotlivým ukazatelům. Představme si, že například budeme agregovat tři ukazatele. Nejjednoduššími váhami jsou váhy rovné, kdy všem agregovaným ukazatelům přiřadíme shodné váhy. V našem případě by tedy každý ukazatel měl přiřazeny váhy 1/3. V praxi samozřejmě často volíme váhy různé a snažíme se je stanovit tak, aby byly co možná nejméně subjektivní. Tento krok je velmi důležitý, neboť váhy určují význam a vliv jednotlivých ukazatelů na celkový výsledek. I z tohoto důvodu existuje pro jejich tvorbu a minimalizaci subjektivní složky mnoho statisticko-matematických metod. V dalším kroku musíme určit tzv. agregační mechanismus, to znamená způsob, jakým budou ukazatele agregovány do jednoho výsledného indexu. Nejjednoduššími agregačními mechanismy jsou různé typy průměrů. Opět však lze nalézt i mnoho dalších mechanismů. Podíváme se na nám známé aritmetický a geometrický průměr. Hlavním rozdílem v jejich použití je tzv. **kompenzovatelnost vstupujících ukazatelů**. Co to znamená, si ukážeme na jednoduchém příkladu.

Mějme dvě země, které porovnáváme pomocí kompozitního ukazatele vytvořeného na základě tří ukazatelů. Tyto ukazatele nabývají hodnoty od 1 do 5, přičemž 1 je nejhorší a 5 je nejlepší výsledek. Pro úplnost dodejme, že je pro názornost a jednoduchost ve výpočtu využito rovných vah a můžeme tak použít vzorců pro prostý aritmetický a geometrický průměr.

Tabulka: příklad agregace

Ukazatel	Země A	Země B
A	1	3
B	1	3
C	5	3
D	5	3
Aritmetický průměr	3,00	3,00
Geometrický průměr	2,24	3,00

Zdroj: vlastní

V tabulce můžeme vidět, že země A dosáhla u poloviny ukazatelů nejlepšího skóre, tedy 5 a u druhé poloviny ukazatelů naopak nejhoršího skóre, což znamená 1. Oproti tomu země

B vykazovala u všech ukazatelů průměrné výsledky (3 body). Při použití agregačního mechanismu v podobě aritmetického průměru je skóre výsledného kompozitního indikátoru pro obě země stejné. Použijeme-li ale agregaci pomocí geometrického průměru, dosáhla země B lepšího výsledku než země A. Tento rozdíl je dán právě různou úrovní kompenzace vstupujících ukazatelů těchto dvou agregačních mechanismů. Zatímco aritmetický průměr umožňuje plnou kompenzovatelnost, a tedy nahrazení velmi špatných výsledků u některých ukazatelů velmi dobrými výsledky ukazatelů jiných, geometrický průměr již umožňuje tuto kompenzaci pouze částečně a upřednostňuje tak „průměrnou“ zemi B.

Seznam použité literatury:

1) EUROSTAT. Kodex evropské statistiky pro vnitrostátní statistické orgány a pro Eurostat (statistický úřad EU). Lucemburk 2018. ISBN 978-92-79-80037-5
2) FISCHER, Jakub a kol. Vliv informačních a komunikačních technologií na produktivitu práce a souhrnnou produktivitu faktorů v České republice. Politická ekonomie. 2013, roč. 61, č. 5, s. 653–674. ISSN 0032-3233.
3) HINDLS, Richard a kol. Statistika pro ekonomy. Professional Publishing, 2004. ISBN 80-86419-59-2
4) JÍLEK, Jaroslav a kol. Nástin sociálněhospodářské statistiky. Oeconomica, nakladatelství VŠE, 2005. ISBN 80-245-0840-0
5) JEŘÁBKOVÁ, Věra, ZELENÝ, Martin. Pracovní neschopnost – významný ukazatel nejen v období ekonomické krize? Praha 05.12.2011 – 06.12.2011. RELIK 2011 – Reprodukce lidského kapitálu vzájemné vazby a souvislosti [CD-ROM]. Slaný: Melandrium, 2011. ISBN 978-80-86175-75-1.
6) KOŠŤÁKOVÁ, Tereza. O složitém jednoduše. Český statistický úřad. Praha 2019. ISBN 978-80-250-2908-4.
7) OECD. Handbook of the International Comparison Programme, Studies in Methods, Series F, No. 62, United Nations Department of Economic and Social Development, Statistical Division, New York, 1992, Glossary.
8) OECD, European Union. Handbook on Constructing Composite Indicators: Methodology and User Guide. OECD Publishing, 2008 ISBN 978-92-64-04346-6
9) SEGER, Jan, HINDLS Richard, HRONOVÁ, Stanislava. Statistika v hospodářství. ETC Publishing. Praha 1998 ISBN 80-86006-56-5
10) UNDP. Human Development Report 2014. United Nations Development Programme. New York 2014 ISBN 978-92-1-126368-8

Stránky našeho nakladatelství
https://oeconomica.vse.cz/

Název	**Základní metody statistického srovnávání**
Autoři	prof. Ing. Jakub Fischer, Ph.D. Ing. Věra Jeřábková, Ph.D. Ing. Ludmila Petkovová, Ph.D. Ing. Veronika Ptáčková Ing. Petra Švarcová
Vydavatel	Vysoká škola ekonomická v Praze Nakladatelství Oeconomica
Doporučeno	pro bakalářské studium na VŠE v Praze
Vydání	první
Návrh obálky	Daniel Hamerník, DiS.
Počet stran	88
DTP	Vysoká škola ekonomická v Praze Nakladatelství Oeconomica
Sazba	autoři

Tato publikace neprošla redakční úpravou.

ISBN 978-80-245-2342-2

Zdarma ke stažení